EXAMENUL DE BACALAUREAT NAȚIONAL 2024
Simulare județeană
ProbaE.c) M_șt. naturii
BAREM DE NOTARE ȘI EVALUARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

Subiectul I **(30 puncte)**

1.	Din $a_{20}+a_{24}=a_1+19r+a_1+23r=2a_1+42r$ se obține $2a_1+42r=2024$, de unde $a_1+21r=1012$	**3p**
	$a_{22}=a_1+21r=1012$.	**2p**
	Sau $a_{20}+a_{24}=2024\Leftrightarrow a_{22}-2r+a_{22}+2r=2024\Leftrightarrow a_{22}=1012$.	**5p**
2.	Trebuie ca ecuația $f(x)=g(x)\Leftrightarrow 2x-3=x^2-m\Leftrightarrow x^2-2x+3-m=0$ să aibă $\Delta=0$	**3p**
	$\Delta=4m-8$. Din $4m-8=0$ se obține $m=2$.	**2p**
3.	$2^{2x+1}=5\cdot 2^x-2\Leftrightarrow 2^{2x+1}-5\cdot 2^x+2=0\Leftrightarrow 2\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x+2=0$. Notăm $2^x=t>0\Rightarrow 2t^2-5t+2=0$	**3p**
	Se obține $t_1=\frac{1}{2}>0\Rightarrow 2^x=\frac{1}{2}$, de unde $x_1=-1$ și$t_2=2>0\Rightarrow 2^x=2$, de unde $x_2=1$.	**2p**
	Sau $2^{2x+1}=5\cdot 2^x-2\Leftrightarrow 2\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x+2=0\Leftrightarrow\left(2^x-\frac{1}{2}\right)\left(2^x-2\right)=0$, de unde $x_1=-1, x_2=1$.	**5p**
4.	Se pot forma $A_5^3-A_4^2$ numere de trei cifre, unde A_4^2 reprezintă numărul numerelor de trei cifre cu prima cifră 0.	**2p**
	$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$. $A_5^3-A_4^2=60-12=48$ numere de trei cifre.	**3p**
5.	$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$	**3p**
	Din $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ se obține: $a=\frac{3}{4}$, $b=\frac{1}{4}$.	**2p**

	Sau folosește teorema punctului care împarte un segment într-un raport dat $\frac{BM}{MC}=k=\frac{1}{3}$: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{AC}$, pentru $k=\frac{1}{3}$, de unde $a=\frac{3}{4}$, $b=\frac{1}{4}$.	**5p**
6.	Din $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ se obține $\lvert\cos x\rvert=\sqrt{1-\sin^2 x}$.	**1p**
	Pentru $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ avem $\cos x=-\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=-\sqrt{\frac{5}{9}}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$	**2p**
	Avem $\sin 2x=2\sin x\cos x=2\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=-\frac{4\sqrt{5}}{9}$.	**2p**

Subiectul II **(30 puncte)**

1. a)	Pentru $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -\frac{3}{2} & -3\end{pmatrix}$, calcul direct $I_2+A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -\frac{3}{2} & -2\end{pmatrix}$	**2p**
	și $(I_2+A)^2=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -\frac{3}{2} & -2\end{pmatrix}=I_2+A$.	**3p**
b)	Calcul $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ \frac{3}{2} & 3\end{pmatrix}=-A$	**2p**
	$A^3=A^2\cdot A=-A\cdot A=-A^2=A$	**2p**
	Mulțimea $\{A^n \mid n\in\mathbb{N}^*\}=\{-A,A\}$ are 2 elemente.	**1p**
c)	$\det(2024\cdot I_2-A+A^2-A^3+...+A^{2024})=\det(2024\cdot I_2\underbrace{-A-A-...-A}_{2024\,ori})=$	**2p**
	$=\det(2024\cdot I_2-2024\cdot A)=\det(2024(I_2-A))=2024^2\begin{vmatrix}-1 & -4\\ \frac{3}{2} & 4\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2\cdot 2024^2$.	**1p**
2. a)	Calcul direct: $(x-4)(y-4)+4=xy-4x-4y+20=x\circ y,\ x,y\in\mathbb{R}$. **Sau** $x\circ y=xy-4x-4y+16+4=x(y-4)-4(y-4)+4=(x-4)(y-4)+4$.	**5p**
b)	Legea este asociativă și comutativă.	

	Element neutru: $\exists e \in \mathbb{R}$ *a.î.* $x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Se obţine $e = 5 \in \mathbb{R}$.	**2p**
	Elemente simetrizabile: pentru $x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}$ *a.î.* $x \circ x' = x' \circ x = 5$, se obţine $x' = \dfrac{4x-15}{x-4} \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.	**2p**
	Mulțimea elementelor simetrizabile este $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.	**1p**
c)	Avem că $x \circ x \circ x \circ x = \left(\left(x \circ x\right) \circ x\right) \circ x = (x-4)^4 + 4$	**3p**
	Din $(x-4)^4 + 4 = 20 \Leftrightarrow (x-4)^4 = 16$ se obțin soluțiile $x_1 = 2, x_2 = 6$.	**2p**

Subiectul III **(30 puncte)**

1. a)	$f'(x) = \dfrac{(2x-1)(x+1) - x^2 + x - 2}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	**3p**
	$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x-2} = f'(2) = \dfrac{5}{9}$.	**2p**
	Sau $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - 7x + 2}{3x^2 - 3x - 6} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x-1}{3x+3} = \dfrac{5}{9}$.	**5p**
b)	Pentru asimptotă orizontală la $+\infty$: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - x + 2}{x+1} = +\infty$. Deci nu există asimptotă orizontală.	**1p**
	Căutăm asimptotă oblică: $y = mx + n$ $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x + 2}{x^2 + x} = 1 \in \mathbb{R}^*$	**2p**
	$n = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - x + 2}{x+1} - x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x + 2}{x+1} = -2$ Ecuația asimptotei oblice la $+\infty$ este $y = mx + n = x - 2$.	**2p**
c)	$f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$, cu soluţiile $x_1 = -3, x_2 = 1$.	**2p**
	Din tabelul cu semnul derivatei, avem că $x_1 = -3$, geometric $A(-3, -7)$, este punct maxim şi $x_2 = 1$, geometric $B(1,1)$, este punct minim.	**3p**

2. a)	Funcția F este o primitivă a lui f dacă F este funcție derivabilă și $F'(x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F'(x)=\dfrac{(-2x+2)e^x-(-x^2+2x+2)e^x}{e^{2x}}=\dfrac{x^2-4x}{e^x}=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.	**3p**
b)	$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)\cdot e^x dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(x^2-4x\right)dx=$	**2p**
	$=\left(\dfrac{x^3}{3}-2x^2\right)\Bigg\vert_{-\frac{1}{2}}^{0}=\dfrac{13}{24}$.	**3p**
c)	$F''(x)=f'(x)=\dfrac{-x^2+6x-4}{e^x},\ x\in\mathbb{R}$	**1p**
	Din $F''(x)=0\Leftrightarrow x^2-6x+4=0$ are rădăcinile $x_1=3-\sqrt{5},\ x_2=3+\sqrt{5}$	**2p**
	Din tabelul cu semnul derivatei a doua, F'', avem că F este concavă pentru $x\in\left(-\infty,3-\sqrt{5}\right)\cup\left(3+\sqrt{5},\infty\right)$ și este convexă pentru $x\in\left(3-\sqrt{5},3+\sqrt{5}\right)$, deci F are două puncte de inflexiune: $x_1=3-\sqrt{5},\ x_2=3+\sqrt{5}$.	**2p**