Simulare, Bacalaureat, ianuarie 2024
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $z + 2\bar{z} = 9 + 4i$, $\bar{z}$ este conjugatul lui z. Arătați că modulul numărului z este egal cu 5.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+5$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=mx+1$. Determinați numărul real m pentru care $(g\circ f)(2)=4$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+2}+2\cdot 3^{x+1}-4\cdot 3^x=99$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifra sutelor egală cu cifra unităților.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,3)$ și $B(5,1)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului *AB*.

5p **6.** Arătați că $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $M(x)=I_2+xA$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(1))=-2$.

5p **b)** Demonstrați că $M(x)\cdot M(y)=M(x+y-3xy)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Arătați că **nu** există numere întregi impare x și y, astfel încât $M(x)\cdot M(y)=M(2024)$.

2. Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=x^{\ln\sqrt[3]{y}}$.

5p **a)** Arătați că $2\circ 1=1$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție ,,$\circ$”.

5p **c)** Determinați $x\in M$ pentru care $x\circ x=e^3$

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(e)<\frac{7}{2}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$.

5p **a)** Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ este o primitivă a funcției f.

5p	**b)** Calculați $\int \frac{1}{f(x)}dx$, $x \in (0,+\infty)$.
5p	**c)** Determinați primitiva $H:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ a funcției $h:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = f^2(x)$, știind că $H(1) = 1$.