Simulare, Bacalaureat, ianuarie 2024
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=1+i$. Arătați că $2z=z^2+2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x-m$, unde m este număr real. Determinați valorile reale ale lui m pentru care $f(x)>1$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(3x^2-12\right)=2\log_2(x+2)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 4 sau cu 5.

5p **5.** Se consideră punctul D în planul triunghiului ABC astfel încât $2\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$. Arătați că patrulaterul $ADBC$ este paralelogram.

5p **6.** Determinați $x\in(0,2\pi)$ pentru care $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x-\cos x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1-m & 2m & 0\\ -m & 1+2m & 0\\ 0 & 0 & 1+m\end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=4$.

5p **b)** Demonstrați că $A(m)\cdot A(n)=A(m+n+mn)$, pentru orice numere reale m și n.

5p **c)** Demonstrați că, dacă m, n și p sunt numere reale pentru care $A(m)\cdot A(n)\cdot A(p)=A(0)$, atunci $(1+m)(1+n)(1+p)=1$.

2. Pe $M=[1,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\log_3\left(3^{x+y}-3^{x+1}-3^{y+1}+12\right)$.

5p **a)** Arătați că $x*y=\log_3\left(\left(3^x-3\right)\left(3^y-3\right)+3\right)$, pentru orice $x,y\in M$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați $x\in M$ pentru care $x*x*x=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{3(1-x)}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+3}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{2x}$.

5p **c)** Demonstrați că $2\sqrt{e^{2x}+3}-e^{x}-3\geq 0$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln(x+2)}{x^2+1}$.

5p **a)** Calculați $\int \dfrac{f(x)}{\ln(x+2)}dx,\ x\in(-2,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\int f(x)(x^2+1)dx,\ x\in(-2,+\infty)$.

5p **c)** Arătați că $F\left(-\dfrac{1}{2023}\right)<F\left(-\dfrac{1}{2024}\right)$, unde $F:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f.