Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	Rația progresiei geometrice este $q=\frac{b_6}{b_5}=2$	**2p**
	$b_8=b_6q^2=6\cdot 4=24$	**3p**
2.	$f\left(\sqrt{3}\right)=3-\sqrt{3}-3=-\sqrt{3}$	**2p**
	$f\left(f\left(\sqrt{3}\right)\right)=f\left(-\sqrt{3}\right)=3+\sqrt{3}-3=\sqrt{3}$	**3p**
3.	$\lg x^2=\lg(5x+6)\Rightarrow x^2-5x-6=0$	**3p**
	$x=-1$, care nu convine; $x=6$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile	**2p**
	Cifra sutelor, egală cu cifra unităţilor, poate fi aleasă în 9 moduri, iar, pentru fiecare alegere a cifrei sutelor, cifra zecilor poate fi aleasă în câte 10 moduri, deci sunt 90 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{90}{900}=\frac{1}{10}$	**1p**
5.	$BC \parallel Ox$ și $A\in Oy\Rightarrow AO\perp BC$, deci O este ortocentrul triunghiului $ABC\Leftrightarrow OC\perp AB$	**2p**
	Cum $m_{OC}=-\frac{2}{a}$ și $m_{AB}=5$, obținem că $-\frac{2}{a}\cdot 5=-1$, deci $a=10$	**3p**
6.	$\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}\Rightarrow \sin C=\frac{6\sin B}{3\sqrt{6}}$ și, cum $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$, obținem $\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**3p**
	Cum $C<\pi-\frac{\pi}{3}$, obținem $C=\frac{\pi}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A\left(\sqrt{2}\right)=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A\left(\sqrt{2}\right)\right)=\begin{vmatrix}1 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1\cdot 1-\sqrt{2}\cdot\left(-\sqrt{2}\right)=1+2=3$	**3p**
b)	$\det A(a)=1+a^2$, pentru orice număr real a	**2p**
	$1+a^2>0$, pentru orice număr real $a\Rightarrow \det A(a)\neq 0$, deci $A(a)$ este inversabilă pentru orice număr real a	**3p**
c)	$A(1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $A(1)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$, $A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}=-4I_2$	**3p**
	$A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)=-4I_2\cdot A(1)=-4A(1)$, deci $k=-4$	**2p**

2.a)	$\frac{1}{3}\circ\frac{1}{3}=3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}-2\cdot\frac{1}{3}-2\cdot\frac{1}{3}+2=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}+2=1$, care este număr întreg	**2p**
b)	$x\circ x=3x^2-4x+2$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x\circ x\geq\frac{2}{3}\Leftrightarrow 3x^2-4x+\frac{4}{3}\geq 0$ și, cum $\Delta=0$, obținem că $x\circ x\geq\frac{2}{3}$, pentru orice număr real x	**3p**
c)	$x\circ 1=1\circ x=x$, pentru orice număr real x, deci $e=1$	**2p**
	$x\circ x\circ x=1\Leftrightarrow 3^2\left(x-\frac{2}{3}\right)^3+\frac{2}{3}=1\Leftrightarrow x-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$, de unde obținem $x=1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{e^x\left(x^2+1\right)-2xe^x}{\left(x^2+1\right)^2}=$	**3p**
	$=\frac{e^x\left(x^2-2x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{e^x(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6x}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6}=+\infty$, deci graficul lui f nu admite asimptotă spre $+\infty$	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$, $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(-\infty,1)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(-\infty,1)$, $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$ și, cum f este continuă în $x=1$, obținem că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$	**3p**
	Cum $\frac{\sqrt{5}}{3}<\frac{\sqrt{5}}{2}$, obținem că $f\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)<f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$	**2p**
2.a)	$\int_1^4 f^4(x)dx=\int_1^4 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right\vert_1^4=$	**3p**
	$=\frac{4^3-1^3}{3}=21$	**2p**
b)	$\int_0^1 f\left(e^x\right)dx=\int_0^1\sqrt{e^x}dx=\int_0^1 e^{\frac{x}{2}}dx=\left.2e^{\frac{x}{2}}\right\vert_0^1=$	**3p**
	$=2e^{\frac{1}{2}}-2e^0=2\sqrt{e}-2$	**2p**
c)	$\int_1^4 e^{f(x)}dx=\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx=2\int_1^4\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx=2\int_1^4\left(\sqrt{x}\right)'\cdot\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx=2\int_1^2 t\,e^t\,dt=$	**3p**
	$=\left.2(t-1)e^t\right\vert_1^2=2e^2$	**2p**