Barem de corectare OLM 2019 Clasa a VIII-a

P1 – autor Vasile Scurtu (GM 11/2018)

$E(x,y)=\sqrt{(x+8)^2+(y+3)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}$	2p
$E(x,y)=\sqrt{2(x+8)^2}+\sqrt{2(x+2)^2}$	2p
$E(x,y)=\lvert x+8\rvert\sqrt{2}+\lvert x+2\rvert\sqrt{2}$	1p
$E(x,y)=(x+8)\sqrt{2}+(-x-2)\sqrt{2}=6\sqrt{2}$	2p

P2 – autor Lucian Luca

a) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab\geq$	1p
$\geq 2\sqrt{2ab(a-b)^2}=2\sqrt{2ab}\lvert a-b\rvert\geq 2\sqrt{2ab}(a-b)$	2p
b) Pentru $x_2>x_1$, în baza punctului a) $\dfrac{(x_2-x_1)^2}{(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2)}\leq\dfrac{(x_2-x_1)^2}{(x_1+x_2)2\sqrt{2}(x_2-x_1)\sqrt{x_1x_2}}=$	1p
$=\dfrac{x_2-x_1}{(x_1+x_2)2\sqrt{2}\sqrt{x_1x_2}}\leq\dfrac{x_2-x_1}{2\sqrt{x_1x_2}\cdot 2\sqrt{2}\sqrt{x_1x_2}}=\dfrac{x_2-x_1}{4\sqrt{2}x_1x_2}=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}\right)$	1p
Procedând analog pentru fiecare fracție a sumei, se obține succesiv: $\dfrac{(x_2-x_1)^2}{(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2)}+\ldots+\dfrac{(x_n-x_{n-1})^2}{(x_{n-1}+x_n)(x_{n-1}^2+x_n^2)}\leq\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_3}+\ldots+\dfrac{1}{x_{n-1}}-\dfrac{1}{x_n}\right)=$	1p
$=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_n}\right)\leq\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{8\sqrt{2}}$	1p

P3 – autori Cristian Săuchea și Corina Constantin

a) $BD=5$ cm, $BE=\sqrt{34}$ cm, $BF=\sqrt{14}$ cm	1p
$\angle(BE,(ABC))=\angle EBD$, $\sin\angle EBD=\dfrac{3}{\sqrt{34}}$	1p
$\angle(BF,(ABC))=\angle FBC$, $\sin\angle FBC=\dfrac{2}{\sqrt{14}}$	1p
Compararea celor două sinusuri și stabilirea inegalității $\sin\angle FBC>\sin\angle EBD$	1p
b) Se construiește $BQ\perp EF$, de unde $BQ=d(B,EF)$; $EF=4$ cm	1p
$FQ=x\geq 0$; folosind TP în ΔBEQ și ΔBFQ $34-(4-x)^2=14-x^2$ sau $34-(4+x)^2=14-x^2$, în funcție de poziția lui Q pe EF	1p
Prima ecuație nu are soluții, deci $F\in(EQ)$; din a doua ecuație se obține $x=\dfrac{1}{2}$, de unde $BQ=\dfrac{\sqrt{55}}{2}$	1p

P4

Desen	1p
$d(M,AB)=MD=a$	1p
$CD\perp AC$, $CD=a\sqrt{3}$	1p
Conform T3P $MC\perp AC$, de unde $d(M,AC)=MC=2a$	2p
Dacă $DT\perp BC$, atunci BT se opune unui unghi de 30^0, de unde $DT=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$	1p
Conform T3P $MT\perp BC$, de unde $d(M,BC)=MT=\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$	1p