

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 16.02.2019
Clasa a VIII-a

1. (7p) Se consideră numerele reale x și y , $x \in [-8, -2]$ și $y = x + 5$. Arătați că expresia

$$E(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 16x + 6y + 73} + \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13}$$

este constantă.

2. Demonstrați că:

a) (3p) $a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{2}(a-b)\sqrt{ab}$, pentru orice numere reale de același semn.

b) (4p)
$$\frac{(x_2 - x_1)^2}{(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2)} + \frac{(x_3 - x_2)^2}{(x_2 + x_3)(x_2^2 + x_3^2)} + \dots + \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{(x_{n-1} + x_n)(x_{n-1}^2 + x_n^2)} \leq \frac{1}{8\sqrt{2}}$$
, unde x_1, x_2, \dots, x_n

sunt numere reale, $1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq 2$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

3. Un dreptunghi ABCD are lungimea $AB = \sqrt{15}$ cm și lățimea $BC = \sqrt{10}$ cm. Pe planul dreptunghiului se ridică perpendicularele CF și DE , astfel încât $CF = 2$ cm și $DE = 3$ cm.

a) (4p) Calculați și comparați sinusurile unghiurilor formate de BE , respectiv BF cu planul (ABC) .

b) (3p) Determinați distanța de la punctul B la dreapta EF .

4. (7p) Se consideră triunghiul echilateral ABC și punctul D simetricul lui A față de B . Dacă $MD \perp (ABC)$, $MD = BD = a$, $a > 0$, determinați distanța de la punctul M la dreptele suport ale laturilor triunghiului ABC .

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.