INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

romania2019.eu

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală, 16 februarie 2019

Clasa a VIII-a

Barem de corectare şi notare

Problema 1

(2p) a) Arătați că $\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}=\dfrac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}}$, $\forall n\in N^*$.

(5p) b) Fie $S_n=\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}}$. Să se afle cel mai mare număr natural n pentru care $S_n<\sqrt{2}$.

Soluţie:

a)

$$\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{2n+1+2\sqrt{4n^2-1}+2n-1}{2}}=$$

.............2p

$$=\sqrt{\frac{4n+2\sqrt{4n^2-1}}{2}}=\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}$$

b) Din punctul a) avem: $\dfrac{1}{\sqrt{2k+\sqrt{4k^2-1}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}$ 1p

Înlocuim pe k cu 1,2,3,...,n și adunăm relațiile:

$$S_n=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{1}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+...+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+...+\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}\right)$$

.... 2p

$$S_n=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}\right)<\sqrt{2}\Rightarrow\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}<1\Rightarrow\sqrt{2n+1}<3\Rightarrow 2n+1<9\Rightarrow n<4$$

……1p

Deci cel mai mare număr natural *n* pentru care $S_n<\sqrt{2}$, este $n=3$ …………………… 1p

Problema 2

(4p) a)Determinați numerele reale pozitive x, y, z pentru care $(x+y)(1+z)=20$ şi $xyz=25$.

(Gazeta Matematică 3/2017)

(3p) b) Fie $I \subseteq R$ un interval nedegenerat care nu conţine niciun număr întreg. Arătaţi că $|x-y|<1, \ \forall x, y \in I$.

Soluție:

a) Folosind inegalitatea mediilor avem $x+y \geq 2\sqrt{xy}$, $1+z \geq 2\sqrt{z}$ 1p

Înmulțind membru cu membru cele două relații obținem $(x+y)(1+z) \geq 4\sqrt{xyz}$, de unde

$20 \geq 20$, deducem că toate inegalitățile devin egalități 1p

Și cum în inegalitatea mediilor avem egalitate atunci când numerele sunt egale, obținem :

$(x+y)(1+z)=20$, $x=y; z=1$ de unde $x=y=5, z=1$ 2p

b) Fie $a, b \in R$, $a<b$ şi $I=(a,b)$. Cum $I \cap Z = \varnothing \Rightarrow \exists n \in Z$ astfel încât $n<a<b<n+1$ 2p

Atunci $\forall x, y \in I$ avem că $|x-y|<|b-a|<1$ 1p

Problema 3

Fie triunghiul ΔABC şi ΔABD isoscele şi dreptunghice în B, incluse în plane perpendiculare. Dacă $CD = 6\sqrt{2}$ cm, calculaţi distanţa de la B la planul (ADC).

Soluţie :

$(ABC) \perp (ABD) \Rightarrow \Delta CBD$ dreptunghic isoscel cu $m(\sphericalangle CBD)=90^\circ$, deci $BC=BD=6$ cm 1p

Construim $BM \perp AC, DM \perp AC, BQ \perp DM, AC, DM \subset (ADC) \overset{R_2 T.3\perp}{\Longrightarrow} d(B,(ADC))=BQ$ 3p

$BM = \dfrac{AB \cdot BC}{AC} = 3\sqrt{2}$ cm 1p

În $\Delta DBM, m(\sphericalangle DBM)=90^\circ$ aplicăm T. Pitagora şi obţinem că $DM = 3\sqrt{6}$ cm 1p

Aşadar $BQ = \dfrac{DB \cdot BM}{DM} = 2\sqrt{3}$ cm 1p

Problema 4

În cubul $ABCDA'B'C'D'$ de latură $2a$ se consideră punctul $S \in (CC')$. Notăm $\{O\} = BD \cap AC$ şi $\{M\} = SO \cap A'C'$. Dacă planele $(A'BD)$ şi (MBD) sunt perpendiculare, stabiliţi poziţia punctului S pe CC'.

(Gazeta Matematică Nr. 6-7-8/2013 – enunţ modificat)

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

Soluţie:

(A'BD) $\cap$ (MBD) = BD; Δ A'BD este isoscel (A'D şi A'B sunt diagonale ale feţelor cubului),

O este mijlocul (BD) $\Rightarrow$ A'O $\perp$ BD, (1). 1p

Δ MBD este isoscel (Δ MA'B $\equiv$ Δ MA'D) $\Rightarrow$ MO $\perp$ BD,(2). 1p

Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ $\sphericalangle$((A'BD),(MBD)) = $\sphericalangle$ A'OM. ……………………….............................… 1p

Din $\Delta OCS \sim \Delta A'AO$ $\Rightarrow \dfrac{OC}{AA'} = \dfrac{SC}{AO}$ $\Rightarrow \dfrac{a\sqrt{2}}{2a} = \dfrac{SC}{a\sqrt{2}} \Rightarrow$ SC $= a$ 3p

$\Rightarrow$ S este mijlocul muchiei CC'. …..…………………………………………………….…….…...... 1p