



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală, 16 februarie 2019

Clasa a VII-a

Barem de corectare și notare

Problema 1

(4p) a) Arătați că nu există numere de forma $\overline{abc}$ cu cifre distincte astfel încât $\sqrt{\overline{abc} - \overline{cba}} \in \mathbb{Q}$.

(3p) b) Arătați că oricare ar fi n , număr rațional pozitiv nenul, astfel încât

$$\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \dots + \frac{2019}{n+2019} = 2018, \text{ atunci } \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+2019} = \frac{1}{n}.$$

Soluție:

a) $\sqrt{\overline{abc} - \overline{cba}} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \overline{abc} - \overline{cba} = k^2, k \in \mathbb{Z} \dots\dots\dots 1p$

$99(a-c) = 9 \cdot 11 \cdot (a-c) = k^2 \Rightarrow 11 \cdot (a-c) = 11p^2, p \in \mathbb{Z} \dots\dots\dots 1p$

Ținând cont că a și c sunt cifre nu putem avea decât $p = 0$ de unde $a-c=0 \Rightarrow a=c \dots\dots\dots 1p$

Așadar nu există $\overline{abc}$ cu cifre distincte astfel încât $\sqrt{\overline{abc} - \overline{cba}} \in \mathbb{Q} \dots\dots\dots 1p$

b)

$$\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \dots + \frac{2019}{n+2019} = 2018 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n+1} - 1\right) + \left(\frac{2}{n+2} - 1\right) + \dots + \left(\frac{2019}{n+2019} - 1\right) = -1 \dots\dots\dots 1p$$

$$\Leftrightarrow \frac{-n}{n+1} + \frac{-n}{n+2} + \dots + \frac{-n}{n+2019} = -1 \Leftrightarrow n \cdot \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+2019}\right) = 1 \Leftrightarrow \dots\dots\dots 1p$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+2019} = \frac{1}{n}, n \text{ număr rațional strict pozitiv} \dots\dots\dots 1p$$

Problema 2

(3p) a) Arătați că $\sqrt{\frac{2n^2 + 2n + 1}{2}} > n + \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N}^*$.

(4p) b) Arătați că $\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{13}{2}} + \sqrt{\frac{25}{2}} + \dots + \sqrt{\frac{2n^2 + 2n + 1}{2}} > \frac{n(n+2)}{2}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție :

$$a) \sqrt{\frac{2n^2 + 2n + 1}{2}} = \sqrt{\frac{n^2 + n^2 + 2n + 1}{2}} = \sqrt{\frac{n^2 + (n+1)^2}{2}} \dots\dots\dots 1p$$

Din inegalitatea mediilor ($m_p \geq m_a$) avem că $\sqrt{\frac{n^2 + (n+1)^2}{2}} \geq \frac{n + (n+1)}{2} > n + \frac{1}{2} \dots\dots\dots 2p$

b) Folosind punctul a) obținem

$$\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1}{2}} > 1 + \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\frac{13}{2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 1}{2}} > 2 + \frac{1}{2}$$

$\dots\dots\dots 2p$

....

$$\sqrt{\frac{2n^2 + 2n + 1}{2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot n^2 + 2 \cdot n + 1}{2}} > n + \frac{1}{2}$$

Adunând relațiile avem că

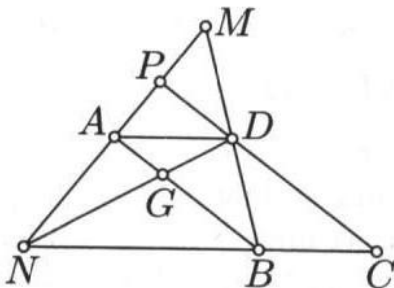
$$\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{13}{2}} + \sqrt{\frac{25}{2}} + \dots + \sqrt{\frac{2n^2 + 2n + 1}{2}} > 1 + 2 + \dots + n + \frac{1}{2}n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+2)}{2}, n \in N^* \dots\dots\dots 2p$$

Problema 3

Pe prelungirea laturii CD a paralelogramului ABCD se ia punctul P astfel încât $DC = 2DP$. Notăm $\{M\} = BD \cap AP$, $\{N\} = BC \cap PA$ și $\{G\} = DN \cap AB$. Demonstrați că G este centrul de greutate al triunghiului MBN.

(Gazeta Matematică)

Soluție :



$$DC = 2DP, DC \equiv AB \text{ deci } AB = 2DP \dots\dots\dots 2p$$

În triunghiul MAB avem $DP \parallel AB$ și $AB = 2DP$ de unde deducem că punctul D este mijlocul segmentului MB și atunci ND este mediană în triunghiul MNB (1) $\dots\dots\dots 2p$

În triunghiul MNB avem $AD \parallel NB$, D mijlocul lui MB deci punctul A este mijlocul segmentului MN și atunci BA este mediană în triunghiul MNB (2) $\dots\dots\dots 2p$



G fiind intersecția dintre ND și BA , din (1) și (2) rezultă că G este centrul de greutate al triunghiului MBN
.....1p

Problema 4

În dreptunghiul $ABCD$ notăm cu E simetricul punctului B față de punctul A și cu F simetricul punctului A față de punctul D . Dacă $\{O\}=AC \cap BD$, $\{P\}=OE \cap AD$ și $\{Q\}=OF \cap CD$, demonstrați că
 $\frac{QD}{AB} + \frac{PD}{BC} = 1$.

(Gazeta Matematică 2/2017)

Soluție :

Fie $OG \parallel AB$, $G \in (AD)$1p

$\triangle QFD \sim \triangle OFG$ atunci $\frac{DQ}{OG} = \frac{FD}{FG} = \frac{2}{3}$, de unde $\frac{DQ}{AB} = \frac{1}{3}$ 2p

$\triangle APE \sim \triangle GPO$ atunci $\frac{AP}{PG} = \frac{AE}{OG} = \frac{2}{1}$ de unde $\frac{AP}{AG} = \frac{2}{3}$ 2p

Rezultă că $\frac{AP}{AD} = \frac{1}{3}$, iar de aici $\frac{DP}{BC} = \frac{2}{3}$ 1p

Atunci $\frac{QD}{AB} + \frac{PD}{BC} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$ 1p