



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală, 16 februarie 2019

Clasa a VI-a

Barem de corectare și notare

Problema 1

Fie numerele naturale a, b, c pentru care $a + 3b - 2c = 50$ și $a + b + c = 72$.

a) Calculați $3a + 5b$.

b) Determinați diferența dintre cea mai mare și cea mai mică valoare posibilă a lui b .

(G.M. 3/2018)

Soluție:

a) Înmulțind a doua relație cu 2 obținem $2a + 2b + 2c = 144$ care adunată cu $a + 3b - 2c = 50$ conduce la $3a + 5b = 194$3p

b) Din $3a + 5b = 194$ obținem $a = \frac{194 - 5b}{3}$. Trebuie ca $\frac{194 - 5b}{3}$ să fie număr natural și $194 - 5b \geq 0$. Cea mai mică valoare a lui b pentru care $\frac{194 - 5b}{3}$ este număr natural este $b = 1$, deci $a = 63$ și $c = 8$2p

Din $194 - 5b \geq 0$ obținem $b \leq 38$, iar cea mai mare valoare a lui b pentru care $\frac{194 - 5b}{3}$ este număr natural este $b = 37$, care se atinge efectiv pentru $a = 3$, $c = 32$. Diferența cerută este 36.....2p

Problema 2

Determinați numerele naturale $\overline{xyz}$, știind că $\frac{y+7}{4} = \frac{42}{z+5}$ și $\overline{xy} + \overline{yz} = 124$.

Soluție :

Din $\frac{y+7}{4} = \frac{42}{z+5} \Rightarrow (y+7)(z+5) = 168$ 1p

$D_{168} \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 21, 24, 28, 42, 56, 84, 168\}$ 1p

Din $\overline{xy} + \overline{yz} = 124 \Rightarrow 10x + 11y + z = 124 \Rightarrow y \leq 11$, (chiar $y \leq 9$, y cifră). Deci, dintre divizorii lui 168 alegem doar acele valori pentru care $y + 7 \leq 18$ și $y + 7 \geq 8$ deoarece y este număr natural nenul.....2p



Pentru $y + 7 = 8$ și $z + 5 = 21$ avem $y = 1$ și $z = 16$, imposibil, z cifră iar pentru $z + 5 = 8$ și $y + 7 = 21$ avem $z = 3$ și $y = 14$ imposibil, y cifră1p

Pentru $y + 7 = 12$ și $z + 5 = 14$ avem $y = 5$ și $z = 9 \Rightarrow 10x + 55 + 9 = 124, \Rightarrow x = 6, \overline{xyz} = 659$ 1p

Pentru $y + 7 = 14$ și $z + 5 = 12$ avem $y = 7$ și $z = 7 \Rightarrow 10x + 77 + 7 = 124, \Rightarrow x = 4, \overline{xyz} = 477$ 1p

Deci numerele căutate sunt : 477, 659.

Problema 3

Câte numere naturale de la 1 la 2019 nu se divid nici cu 3, nici cu 5, nici cu 7 ?

(prelucrare Concurs GM și Viitorii Olimpici)

Soluție :

Vom găsi câte numere se divid sau cu 3 sau cu 5 sau cu 7, iar acest număr îl vom scădea din 2019. Vom nota cu A mulțimea numerelor naturale de la 1 la 2019 care se divid cu 3, cu B mulțimea numerelor naturale de la 1 la 2019 care se divid cu 5, cu C mulțimea numerelor naturale de la 1 la 2019 care se divid cu 7. Deci mulțimea numerelor naturale de la 1 la 2019 care se divid sau cu 3 sau cu 5 sau cu 7 este $A \cup B \cup C$ și $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$ 2p

(s-a notat cu $|X|$ cardinalul mulțimii X)

Din faptul că $0 \leq 3k \leq 2019$, $0 \leq 5p \leq 2019$, $0 \leq 7l \leq 2019$ obținem că $|A| = 672$, $|B| = 403$, $|C| = 288$ 1p

$A \cap B$ reprezintă mulțimea numerelor care se divid și cu 3 și cu 5. Cum $(3, 5) = 1$, din $0 \leq 15a \leq 2019$ obținem că $|A \cap B| = 134$ 1p

$A \cap C$ reprezintă mulțimea numerelor care se divid și cu 3 și cu 7. Cum $(3, 7) = 1$, din $0 \leq 21b \leq 2019$ obținem că $|A \cap C| = 96$ 1p

$B \cap C$ reprezintă mulțimea numerelor care se divid și cu 5 și cu 7. Cum $(5, 7) = 1$, din $0 \leq 35c \leq 2019$ obținem că $|B \cap C| = 57$ 1p

$A \cap B \cap C$ reprezintă mulțimea numerelor care se divid și cu 3 și cu 5 și cu 7. Cum $(3, 5, 7) = 1$, din $0 \leq 105d \leq 2019$ obținem că $|A \cap B \cap C| = 19$ 1p

Deci $|A \cap B \cap C| = 672 + 403 + 288 - 134 - 96 - 57 + 19 = 1095$. Așadar numărul numerelor de la 1 la 2019 care nu se divid nici cu 3, nici cu 5, nici cu 7 este egal cu $2019 - 1095 = 924$ 1p



Problema 4

Fie unghiurile drepte MON și POT astfel încât $\angle MOP = 62^\circ$.

(3p) a) Calculați măsurile unghiurilor MOT și TON.

(4p) b) Dacă OA și OB sunt bisectoarele unghiurilor POM, respectiv TON, determinați măsura unghiului AOB.

(GM 10/2018)

Soluție:

- a) $m\angle MOT = m\angle MOP + m\angle POT = 62^\circ + 90^\circ = 152^\circ$ 1p
 $m\angle NOM + m\angle MOP + m\angle POT + m\angle TON = 360^\circ$ 1p
 $90^\circ + 62^\circ + 90^\circ + m\angle TON = 360^\circ$ deci $m(\angle TON) = 118^\circ$ 1p
- b) [OA bisectoarea $\angle POM$, atunci $m\angle MOA = m\angle AOP = 31^\circ$ 1p
[OB bisectoarea $\angle TON$, atunci $m\angle NOB = m\angle TOB = 59^\circ$ 1p
 $m\angle AOB = m\angle AOP + m\angle POT + m\angle TOB =$ 1p
 $31^\circ + 90^\circ + 59^\circ = 180^\circ$ 1p