



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală, 16 februarie 2019

Clasa a V-a

Barem de corectare și notare

Problema 1

(3p) a) Arătați că numărul $a = 4^{40} + 40^4$ nu este pătrat perfect.

(4p) b) Găsiți câtul și restul împărțirii numărului $x = 4^{50} + 3 \cdot 2^{21} - 2019$ la 64.

Soluție:

a) Vom determina restul împărțirii lui a la 3

$$a = (3+1)^{40} + (39+1)^4 = M_3 + 1 + M_{39} + 1 = M_3 + 2 \dots\dots\dots 2p$$

Restul împărțirii este 2, prin urmare a nu este pătrat perfect.....1p

$$b) x = 2^{100} + 3 \cdot 2^{21} - 2019 = 64(2^{94} + 3 \cdot 2^{15}) - (64 \cdot 31 + 35) \dots\dots\dots 1p$$

$$= 64(2^{94} + 3 \cdot 2^{15} - 31) - 35$$

$$= 64(2^{94} + 3 \cdot 2^{15} - 31) - 64 + 64 - 35 \dots\dots\dots 1p$$

$$= 64(2^{94} + 3 \cdot 2^{15} - 32) + 29 \dots\dots\dots 1p$$

Câtul este $2^{94} + 3 \cdot 2^{15} - 32$ și restul este 29.....1p

Problema 2

Determinați numerele $\overline{abc}$ cu proprietatea că $(a+b+c) \cdot \overline{ac} = 234$.

(Gazeta Matematică 4/2017)

Soluție :

$$\text{Avem } a+b+c \leq 27 \dots\dots\dots 1p$$

Descompunerile în care cel puțin un factor este număr de două cifre sunt:

$$234 = 13 \cdot 18 = 9 \cdot 26 = 6 \cdot 39 = 3 \cdot 78 \dots\dots\dots 1p$$

Cazul 1) $\overline{ac} = 18$ și $a+b+c = 13$, de unde $a = 1, c = 8, b = 4$1p



Cazu 2) $\overline{ac} = 26$ și $a + b + c = 9$, de unde $a = 2, c = 6, b = 1$ 1p

Cazul 3) $\overline{ac} = 13$ și $a + b + c = 18$, de unde $a = 1, c = 3, b = 14$ nu este cifră.....1p

Cazul 4) $\overline{ac} = 39$ și $a + b + c = 6$, de unde $a = 3, c = 9, b$ nu există.....1p

Cazul 5) $\overline{ac} = 78$ și $a + b + c = 3$, de unde $a = 7, c = 8, b$ nu există.....1p

Deci numerele sunt 148 și 216.

Problema 3

Aflați toate numerele naturale m, n, p, q care verifică relația $3^m + 5^n + 6^p + 7^q = 47$.

Soluție:

Folosind următoare afirmație “Orice termen al sumei este mai mic sau egal cu suma” avem că $7^q \leq 47 \Rightarrow q = 0$ sau $q = 1$ 1p

Pentru $q = 0$ obținem $3^m + 5^n + 6^p = 46$ iar din $6^p \leq 46 \Rightarrow p = 0$ sau $p = 1$ sau $p = 2$ 1p

Pentru $p = 0$ avem că $3^m + 5^n = 45$ iar pentru $p = 1$ avem că $3^m + 5^n = 40$. Cele două egalități nu sunt verificate pentru nicio valoare naturală a lui m și n 1p

Pentru $p = 2$ avem că $3^m + 5^n = 10$, egalitate care este adevărată pentru $m = 2$ și $n = 0$ 1p

Pentru $q = 1$ obținem $3^m + 5^n + 6^p = 40$ iar din $6^p \leq 40 \Rightarrow p = 0$ sau $p = 1$ sau $p = 2$ 1p

Pentru $p = 0$ avem că $3^m + 5^n = 39$ care nu este verificată pentru nicio valoare naturală a lui m și n iar pentru $p = 1$ avem că $3^m + 5^n = 40$ care este verificată pentru $m = 2$ și $n = 2$ 1p

Pentru $p = 2$ avem că $3^m + 5^n = 4$, egalitate care este adevărată pentru $m = 1$ și $n = 0$ 1p

În concluzie avem soluțiile: $q = 0, p = 2, n = 0, m = 2$ și $q = 1, p = 1, n = 2, m = 2$ și $q = 1, p = 2, n = 0, m = 1$.

Problema 4

Un album de artă are paginile numerotate de la 1 la 100. Pe fiecare pagină care este multiplu de 2, dar nu și de 5 sunt câte 2 desene. Pe paginile care sunt multipli de 5, dar nu și de 2 sunt 3 desene. În rest, paginile sunt ocupate cu texte explicative.

a) Câte pagini sunt ocupate de text?

b) Câte desene apar în album?

Soluție :

a) Numărul multiplilor de 2, pentru paginile din album, este 50 1p



INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE


romania2019.eu

Numărul multiplilor de 5, pentru paginile din album, este 20 1p

Numărul multiplilor de 10, pentru paginile din album, este 10 1p

$100 - (50 - 10 + 20 - 10) = 100 - 50 = 50$ pagini ocupate de text 1p

b) Numărul multiplilor de 2, dar nu și de 5, este 40, deci $40 : 2 = 80$ desene 1p

Numărul multiplilor de 5, dar nu și de 2 este 10, deci $10 : 3 = 30$ desene 1p

În total avem $80 + 30 = 110$ desene 1p