OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanţa, 17.02.2019

Clasa a VIII-a

Barem de corectare şi notare

SUBIECTUL 1

a) Arătaţi că, oricare ar fi numerele pozitive a şi b are loc egalitatea $\left(\sqrt{ab}\right)^2=\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\cdot\dfrac{a+b}{2}$.

b) Determinaţi $a,b\in(0,+\infty)$ ştiind că $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\cdot\sqrt{ab}\cdot\dfrac{a+b}{2}=192\sqrt{3}$ şi $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}=5\sqrt{2}$.

***Soluţie:* a)** $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\cdot\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{2ab}{a+b}\cdot\dfrac{a+b}{2}=ab=\left(\sqrt{ab}\right)^2,\ \forall a,b\in(0,+\infty)$ **2p**

b) Din a) avem $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\cdot\dfrac{a+b}{2}=\left(\sqrt{ab}\right)^2$ şi atunci prima egalitate devine $\left(\sqrt{ab}\right)^3=192\sqrt{3}$ de unde

$\sqrt{ab}=4\sqrt{3}\Leftrightarrow a\cdot b=48$. Din $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}=5\sqrt{2}\Rightarrow a^2+b^2=100$ **2p**

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=196$. Cum $a,b>0\Rightarrow a+b=14$ **1p**

$a\cdot b=48\Rightarrow a\cdot(14-a)=48\Rightarrow(a-7)^2=1\Rightarrow a\in\{6,8\}$ **1p**

Verifică egalitatea perechile $(a,b)\in\{(6,8),(8,6)\}$ **1p**

SUBIECTUL 2

Fie numerele $a=\sqrt{2^{2014}-2^{1008}+2^{1009}+1}$ şi $b=\sqrt{2^{2014}-2^{1009}+2^{1008}+1}$.

a) Arătaţi că numerele a şi b sunt numere naturale impare consecutive.

b) Comparaţi numerele $5a-3b$ şi $\sqrt{5}^{864}$.

***Soluţie:* a)** $a=\sqrt{2^{2014}-2^{1008}(1-2)+1}=\sqrt{2^{2014}+2^{1008}+1}=\sqrt{2^{2014}+2\cdot2^{1007}+1}=\sqrt{\left(2^{1007}+1\right)^2}$

Deoarece $2^{1007}+1>0$, avem $a=\left|2^{1007}+1\right|=2^{1007}+1$ **1p**

$b=\sqrt{2^{2014}-2^{1008}(2-1)+1}=\sqrt{2^{2014}-2^{1008}+1}=\sqrt{2^{2014}-2\cdot2^{1007}+1}=\sqrt{\left(2^{1007}-1\right)^2}$

Deoarece $2^{1007}-1>0$, avem $b=\left|2^{1007}-1\right|=2^{1007}-1$ **1p**

Aşadar a şi b sunt numere naturale impare, iar $b=a+2$, deci a şi b sunt numere naturale impare consecutive. **1p**

b) $5a-3b=5\left(2^{1007}+1\right)-3\left(2^{1007}-1\right)=2\cdot2^{1007}+8=2^{1008}+8$

$5a-3b=2^{1008}+8>2^{1008}=\left(2^7\right)^{144}=128^{144}>125^{144}$ **2p**

$5a-3b>125^{144}=\left(5^3\right)^{144}=5^{432}=\left(\sqrt{5}^2\right)^{432}=\sqrt{5}^{864}\Rightarrow5a-3b>\sqrt{5}^{864}$ **2p**

SUBIECTUL 3

Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată, cu $AB=8$ cm, $AA'=8\sqrt{3}$ cm.

a) Dacă I este proiecţia punctului A pe planul $(A'BC)$, să se demonstreze că punctul I este centrul cercului înscris în triunghiul $A'BC$.

b) Să se afle sinusul unghiului format de dreptele AB şi $A'C$.

G.M. Supliment, nr. 3/2018

Soluţie: **a)** $\Pr_{(A'BC)} A = I \Rightarrow AI \perp (A'BC)$.

$$Fie\ \left.\begin{array}{r} AI \perp (A'BC) \\ ID \perp BC, D \in BC \\ ID, BC \subset (A'BC) \end{array}\right\} \Rightarrow AD \perp BC; AD = 4\sqrt{3}cm$$

$$Fie\ \left.\begin{array}{r} AI \perp (A'BC) \\ IE \perp A'B, E \in A'B \\ IE, A'B \subset (A'BC) \end{array}\right\} \Rightarrow AE \perp A'B; AE = 4\sqrt{3}cm$$

$$Fie\ \left.\begin{array}{r} AI \perp (A'BC) \\ IF \perp A'C, F \in A'C \\ IF, A'C \subset (A'BC) \end{array}\right\} \Rightarrow AF \perp A'C; AF = 4\sqrt{3}cm$$ **3p**

$\Delta AID \equiv \Delta AIE \equiv \Delta AIF (I.C.) \Rightarrow [ID] \equiv [IE] \equiv [IF]$, de unde deducem că I este centrul cercului înscris în triunghiul $A'BC$ **1p**

b) $AB \parallel A'B' \Rightarrow \sphericalangle(AB, A'C) = \sphericalangle(A'B', A'C) = \sphericalangle B'A'C$ **1p**

Fie $CT \perp A'B', T \in A'B' \Rightarrow CT = 4\sqrt{15}$ cm $\Rightarrow \sin \sphericalangle CA'T = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ **2p**

SUBIECTUL 4

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu $AB = 12$ cm, punctul P este centrul feţei $ADD'A'$, iar Q este mijlocul muchiei $[BC]$.

a) Să se calculeze lungimile segmentelor $[C'P]$ şi $[QP]$.

b) Să se calculeze distanţa de la punctul Q la planul $(A'C'D)$.

Soluţie: **a)** Din triunghiul $\Delta D'C'P$ obţinem $C'P = 6\sqrt{6}$ cm. **1p**

Dacă M este mijlocul laturii $[AD]$, din triunghiul ΔPMQ obţinem $PQ = 6\sqrt{5}$ cm. **1p**

b) Din triunghiul $\Delta CC'Q$ obţinem $C'Q = 6\sqrt{5}$ cm. **1p**

Din triunghiul ΔCDQ obţinem $DQ = 6\sqrt{5}$ cm. **1p**

Din $C'Q = DQ = PQ$ şi $(A'C'D) = (PC'D)$ deducem că proiecţia lui Q pe planul $(PC'D)$ cade în centrul cercului circumscris triunghiului $\Delta PC'D$ care este dreptunghic în P. Fie N mijlocul ipotenuzei $[C'D] \Rightarrow$ N este centrul cercului circumscris triunghiului $\Delta PC'D$. **1p**

$QN \perp (PC'D) \Rightarrow QN \perp (A'C'D) \Rightarrow d(Q,(A'C'D)) = QN$ **1p**

Din triunghiul $\Delta QNC'$ obţinem $QN = 6\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow d(Q,(A'C'D)) = 6\sqrt{3}$ cm **1p**

Notă

Orice altă rezolvare corectă primeşte punctajul maxim.