INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN CONSTANȚA — ROMÂNIA — MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 17.02.2019

Clasa a VII-a

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1

a) Demonstrați că $\frac{k}{n(n+k)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}, \forall n,k\in\mathbb{N}$.

b) Se dau numerele $a=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{3}{5\cdot 8}+\frac{4}{8\cdot 12}+\frac{5}{12\cdot 17}+\frac{6}{17\cdot 23}+\frac{7}{23\cdot 30}$ și $b=3+8+13+...+10018$. Calculați partea întreagă a numărului $\sqrt{15\cdot a+\frac{b}{1002}}$.

a) Calcul direct 1p

b)

$a=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{23}-\frac{1}{30}$ ______ 1p

$a=\frac{7}{15}$ ______ 1p

$b=3+8+13+...+10018=(10018+3)\cdot[(10018-3):5+1]=10021\cdot 1002$ ______ 2p

$\sqrt{15\cdot a+\frac{b}{1002}}=\sqrt{15\cdot\frac{7}{15}+\frac{10021\cdot 1002}{1002}}=\sqrt{10028}$ ______ 1p

$[\sqrt{10028}]=100$ ______ 1p

SUBIECTUL 2

a) Arătați că pentru orice $x\in\mathbb{N}$ care nu este multiplu de 3, restul împărțirii lui x^2 la 3 este egal cu 1.

b) Demonstrați că $a=\sqrt{2018^{2020}+2020^{2018}+2019}$ este irațional.

a)

$x=3k+1$ *sau* $x=3k-1$ 1p

$x^2=(3k\pm 1)^2=M_3+1$ 1p

$r=1$ 1p

b)

$2018^{2020}+2020^{2018}+2019=$

$(3\cdot 673-1)^{2020}+(3\cdot 673+1)^{2020}+3\cdot 673$ 2p

$=M_3+1+M_3+1+M_3=M_3+2$ 1p

$a=\sqrt{M_3+2}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ 1p

SUBIECTUL 3

Se consideră un triunghi ascuțitunghic ABC și fie D piciorul înălțimii din A pe BC. Se duce $DE\perp AC$, $E\in AC$ și fie F un punct pe segmentul (DE) astfel încât $AF\perp BE$.

Arătați că $\frac{DF}{EF}=\frac{CD}{BD}$.

$DG \parallel BE, G \in AC$ .... $1p$

$AF \perp BE \Rightarrow AF \perp DG; DE \perp AG \Rightarrow F$ *ortocentrul* $\triangle ADG$ .... $2p$

$GF \perp AD$ *si* $AD \perp BC \Rightarrow FG \parallel BC$ .... $1p$

Teorema lui Thales $\triangle ECD \Rightarrow FG \parallel DC \Rightarrow \frac{DF}{EF} = \frac{CG}{GE}$ .... $1p$

Teorema lui Thales $\triangle CBE \Rightarrow DG \parallel BE \Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{CG}{GE}$ .... $1p$

$\Rightarrow \frac{DF}{EF} = \frac{CD}{BD}$ .... $1p$

SUBIECTUL 4

Fie ABC un triunghi echilateral, $M \in AC$ astfel încât $\frac{AM}{AC} = \frac{2}{3}$ şi N simetricul lui M faţă de BC. Dreapta NC intersectează paralela prin A la BC în T, iar TM intersectează BC în O şi pe AB în Q.

a) Demonstraţi că $ABCT$ este romb.

b) Arătaţi că BO este linie mijlocie în triunghiul ATQ.

a) Fie S punctul în care MN intersectează BC

$\triangle MCN$ *isoscel* $\Rightarrow m(\sphericalangle MCS) = m(\sphericalangle SCN) = 60^\circ$ .... $1p$

$m(\sphericalangle MCT) = 180^\circ - [m(\sphericalangle MCS) + m(\sphericalangle SCN)] = 60^\circ$ .... $1p$

$m(\sphericalangle MCT) = m(\sphericalangle BAC)$ *alterne interne* $\Rightarrow AB \parallel CT$ .... $1p$

din ipoteză $AT \parallel BC, BC \equiv AB \Rightarrow ABCT$ *romb* .... $1p$

b)

$OC \parallel AT \xrightarrow{T.F.A} \triangle AMT \approx \triangle CMO \Rightarrow \frac{AT}{OC} = \frac{AM}{MC} = \frac{2}{1}$ .... $1p$

$AT = BC \Rightarrow AT = 2 \cdot OC, BC = 2 \cdot OC \Rightarrow O$ *mijlocul lui* BC .... $1p$

finalizare .... $1p$

Notă : Orice altă soluţie corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim.