



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 17.02.2019

Clasa a VI-a

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1

- a) Fie $S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{19}$. Arătați că S este divizibil cu 15 și cu 25.
b) Determinați ultimele 2 cifre ale numărului 2^{2019} .

Soluție:

- a) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 = 15$ 1p
 $S = 15 \cdot (1 + 2^4 + 2^8 + 2^{12} + 2^{16}) \Rightarrow 15 \mid S$ 1p
 $S + 1 = 2^{20} \Rightarrow S = 2^{20} - 1$ 2p
 $zu(x)$ = ultimele 2 cifre ale lui x
 $zu(2^{20}) = zu(zu(2^{10}) \cdot zu(2^{10})) = zu(24 \cdot 24) = 76 \Rightarrow zu(S) = 75 \Rightarrow 25 \mid S$ 1p
b) $25 \mid (2^{20} - 1) \Rightarrow 100 \mid (2^{22} - 2^2) \Rightarrow zu(2^{22}) = zu(2^2) = 04$ 1p
 $zu(2^{2019}) = zu(2^{19}) = zu(zu(2^{10}) \cdot zu(2^9)) = zu(24 \cdot 12) = 88$ 1p

SUBIECTUL 2

Se consideră mulțimile $A = \{k^2 \mid k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{5n+7 \mid n \in \mathbb{N}\}$ și $C = \{7; 11; 15; \dots; 2019\}$.

- a) Arătați că mulțimile A și B sunt disjuncte.
b) Demonstrați că numărul submulțimilor mulțimii C este cub perfect.

Soluție:

- a) $u(5n+7) \in \{2, 7\}$ 2p
 $u(k^2) \in \{0; 1; 4; 5; 6; 9\} \Rightarrow A \cap B = \emptyset$ 1p
b) Elementele din C sunt de forma $4k+3$ 1p
 $7 = 4 \cdot 1 + 3; 2019 = 4 \cdot 504 + 3 \Rightarrow \text{card } C = 504$ 1p
Numărul de submulțimi ale mulțimii C este $2^{\text{card } C} = 2^{504}$ 1p
 $2^{504} = (2^{168})^3$ este cub perfect1p

SUBIECTUL 3

- a) Comparați numărul divizorilor numărului 2019^{2020} cu numărul divizorilor numărului 2020^{2019} .
b) Fie numerele naturale $a = 6n + 5$ și $b = 14n + 11$ cu n număr natural. Arătați că $[a, b] = a \cdot b$, unde $[a, b]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b .

Soluție:

- a) $2019^{2020} = 3^{2020} \cdot 673^{2020}$ are $2021 \cdot 2021 = 2021^2$ divizori1p
 $2020^{2019} = 2^{4038} \cdot 5^{2019} \cdot 101^{2019}$ are $4039 \cdot 2020 \cdot 2020 = 4039 \cdot 2020^2$ divizori1p
 $4039 \cdot 2020^2 > 4038 \cdot 2020^2 = (2 \cdot 2020) \cdot (2019 \cdot 2020) > 2021 \cdot 2021 = 2021^2$...1p
b) Fie $d = (a, b) = (6n+5, 14n+11) \Rightarrow d \mid 6n + 5$ și $d \mid 14n + 11 \Rightarrow$
 $d \mid 7(6n + 5) - 3(14n + 11) = > d \mid 2$ 2p
 $6n + 5$ este număr impar $\Rightarrow d$ este număr impar $\Rightarrow d = 1$ 1p
 $a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b] \Rightarrow a \cdot b = [a, b]$ 1p

SUBIECTUL 4

În jurul punctului O se consideră unghiurile $\angle A_0OA_1 = 1^\circ$, $\angle A_1OA_2 = 2^\circ$,

$\angle A_2OA_3 = 3^\circ$, ..., $\angle A_{25}OA_{26} = 26^\circ$ și $\angle A_{26}OA_0$.

- Determinați măsura $\angle A_{26}OA_0$ și demonstrați că punctele A_{26} , O și A_{18} sunt coliniare.
- Pentru câte valori ale numărului natural n , de la 1 la 25, avem $\angle A_0OA_n > \angle A_0OA_{n+1}$.
(Supliment G.M. , enunț modificat)

Soluție:

- $1^\circ + 2^\circ + \dots + 26^\circ = 351^\circ$ 1p
 $\angle A_{26}OA_0 = 360^\circ - 351^\circ = 9^\circ$ 1p
 $\angle A_0OA_{18} = 1^\circ + 2^\circ + \dots + 18^\circ = 171^\circ$ 1p
 $\angle A_{26}OA_{18} = 180^\circ \Rightarrow$ punctele A_{26} , O și A_{18} sunt coliniare1p
- Semidreapta $OA_i \subset \text{Int}(\angle A_0OA_{18})$ pentru $i \in \{1, 2, 3, \dots, 17\} \Rightarrow \angle A_0OA_i <$
 $\angle A_0OA_{i+1}$ 1p
 $\angle A_0OA_{19} = 360^\circ - (171^\circ + 19^\circ) = 170^\circ \Rightarrow \angle A_0OA_{18} > \angle A_0OA_{19}$ 1p
 Semidreapta $OA_i \subset \text{Int}(\angle A_0OA_{19})$ pentru $i \in \{20, 21, 22, 23, 24, 25\} \Rightarrow \angle A_0OA_i >$
 $\angle A_0OA_{i+1}$ pentru $i \in \{19, 20, 21, 22, 23, 24, 25\}$, deci n ia 8 valori1p

Notă : Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim.