OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2019
BAREM

CLASA A VIII A

Subiectul I
Relația din ipoteză se poate pune sub forma
$x^2+y^2+2x\sqrt{2}-y+\frac{9}{4}=x^2+2x\sqrt{2}+2+y^2-y+\frac{1}{4}$ ……………………........3p
$\left(x+\sqrt{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=0$…………………………………......................2p
$x+\sqrt{2}=y-\frac{1}{2}=0$...1p
$x=-\sqrt{2}$ și $y=\frac{1}{2}$…………………..1p
Subiectul II
a) Dacă se elimină numitorii şi se fac calculele inegalitatea se rescrie echivalent sub forma
$$(ay-bx)^2\geq 0$$
Relaţie ce este , evident, adevărată în $\mathbb{R}$...2p
Egalitate se obţine atunci când $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$ 1p
b) Inegalitatea de la a) se poate generaliza astfel
Dacă a,b,c sunt numere reale şi x,y,z sunt numere reale strict pozitive
demonstraţi inegalitatea $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$.
Egalitate se obţine pentru $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$ 1p
Rezultă
$\frac{1}{10}=\frac{1^2}{2x+y+2}+\frac{1^2}{2y+z+3}+\frac{1^2}{2z+x+4}\geq\frac{(1+1+1)^2}{3x+3y+3z+9}=\frac{1}{10}$ 1p
Având egalitate în inegalitate rezultă că
$\frac{1}{2x+y+2}=\frac{1}{2y+z+3}=\frac{1}{2z+x+4}=\frac{1}{30}$ ……..1p
Se obţine $x=\frac{28}{3},y=\frac{28}{3},z=\frac{25}{3}$..1p
Subiectul III
Fie $SO\perp(ABC), O\in(ABC)$. Atunci avem : $SO\perp OB, O\in AC\cap DB$ (1) și
$OB\perp AC$ (2) .Din (1) și (2) rezultă că $BO\perp(SAC)$.
....1p
Construim $OP\perp SC, P\in SC$. $BO\perp(SAC), OP\perp SC; OP, SC\subset(SAC)$ implică
$BP\perp SC$. Din $(SBC)\cap(SAC)=AC, BP\perp SC, BP\subset(SBC), OP\perp SC, OP\subset(SAC)$ rezultă
că $m(\sphericalangle OPB)=m\left(\sphericalangle(SBC),(SAC)\right)=60^\circ$
....2p
Din $BO\perp(SAC)$ și $OP\subset(SAC)$ rezultă că $m(\sphericalangle BOP)=90^\circ$ și cum $OB=\frac{BD}{2}=\frac{AB\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}cm$, se obţine $OP=2\sqrt{6}cm$.
....1p
În triunghiul SOC cu $m(\sphericalangle SOC)=90^\circ, [OP]$ este înălţime şi avem
$SO\cdot OC=OP\cdot SC$, de unde deducem că $SO\cdot 6\sqrt{2}=2\sqrt{6}\cdot SC$ Şi rezultă că
$SC=SO\sqrt{3}cm$ (3)

....2p
Cu teorema lui Pitagora în triunghiul SOC avem $SC^2 - SO^2 = OC^2$ (4)
Din $(3), (4)$ şi $OC = 6\sqrt{2}cm$ se obţine $SO = 6cm$.
....1p

Subiectul IV
a) Se demonstrează că patrulaterele $MPNQ$ şi $RPSQ$ sunt paralelograme
....2p
Rezultă că RS trece prin mijlocul lui $[PQ]$, Prin care trece şi MN.
Deci dreptele RS, MN, PQ se intersectează într-un punct (numit centrul de greutate al tetraedrului)
....1p
b)
Fie $AA_1 \perp (BCD)$. Rezultă că $AA_1 \perp CD$ şi cum $AB \perp CD$, avem $CD \perp (AA_1B)$, deci $CD \perp BA_1$. Analog din $AA_1 \perp BD$ şi $AC \perp BD$ avem $BD \perp CA_1$. Deci BA_1 şi CA_1 sunt înălţimi în triunghiul BCD, de unde se obţine $DA_1 \perp BC$. Cum $AA_1 \perp BC$ rezultă $BC \perp (AA_1D)$. Aceasta implică $BC \perp AD$.
....2p

Patrulaterul $MRNS$ este paralelogram : $MR \parallel SN$ (ambele fiind paralele cu BC) şi $MS \parallel RN$ (ambele fiind paralele cu AD) Cum $BC \perp AD$ rezultă că $MR \perp MS$. Deci $m(\sphericalangle RMS) = 90^\circ$, şi obţinem că $MRNS$ este dreptunghi.
....2p