

Olimpiada Națională de Matematică - Etapa locală

Clasa a VIII – a

VARIANTA 1

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

1. $a = \sqrt{(x-6)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x-11)^2 + (y+2)^2}$ 1p

$x - 6 = -5(y + 1) \in [0; 5] \Rightarrow y + 1 \in [-1; 0]$ 1p

$x - 11 = -5(y + 2) \in [-5; 0] \Rightarrow y + 2 \in [0; 1]$ 1p

$a = |y+1|\sqrt{26} + |y+2|\sqrt{26}$ 1p

$a = \sqrt{26}(-y-1+y+2)$ 1p

$a = \sqrt{26}$ 1p

Finalizare, a este număr irațional. 1p

2. Se notează $\underbrace{111 \dots 1}_{2017} = n$. Avem

$A = 9(n \cdot \underbrace{10^{2017}}_{2017} + 5n) + 9 = 9n(10^{2017} + 5) + 9$ 2p

Dar $9n = 9 \cdot \underbrace{111 \dots 1}_{2017} = \underbrace{999 \dots 9}_{2017} = 10^{2017} - 1$ 1p

și atunci $A = (10^{2017} - 1)(10^{2017} + 5) + 9$ 1p

Dacă notăm $10^{2017} - 1 = p$, avem $A = p(p + 6) + 9 = (p + 3)^2$ 2p

$A = (10^{2017} - 1 + 3)^2 = (10^{2017} + 2)^2 \Rightarrow \sqrt{A} = 10^{2017} + 2$ 1p

3.

a) Notând cu l -lungimea laturii cubului obținem că triunghiul BEL este echilateral de latură

$l\sqrt{2}$ și centru T, iar $BO = \frac{l\sqrt{6}}{2}$ este lungimea înălțimii lui, O-centrul bazei..... 1p

Piramidele ABEL și IBEL sunt regulate 1p

$AT \perp (BEL), IT \perp (BEL) \Rightarrow A, I, T$ - coliniare $\Rightarrow AI \perp (BEL)$ 1p

b) $\cos(\angle AG, (BEL)) = \cos(\angle (AG, OT)) = \cos(\angle AOT) = \frac{OT}{AO} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 1p

$AT = \frac{l\sqrt{6}}{3}, LG \parallel AE \Rightarrow m(\angle LG, (BEL)) = m(\angle AE, (BEL)) = m(\angle (AE, ET)) = m(\angle AET)$

$\sin(\angle AET) = \frac{AT}{AE} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 2p

$RC \parallel EL \Rightarrow RC \parallel (BEL) \Rightarrow m(\angle RC, (BEL)) = 0^\circ$ 1p

4. G_1 centrul de greutate al triunghiului BDC $\Rightarrow \frac{BN}{NG_1} = \frac{3}{1}$

G_2 centrul de greutate al triunghiului ADC $\Rightarrow \frac{G_2N}{AG_2} = \frac{1}{2}$ (1) 2p

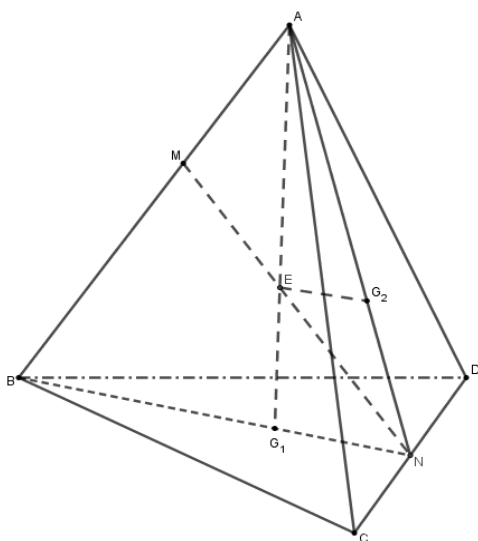
$\frac{AB}{BM} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{2}{3}$ 1p

Aplicăm teorema lui Menelaus pentru triunghiul ABG_1 și transversala $M - E - N$ care taie dreptele suport ale laturilor triunghiului ABG_1 în punctele M, E și N:

$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NG_1} \cdot \frac{G_1E}{EA} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{G_1E}{EA} = 1 \Rightarrow \frac{G_1E}{EA} = \frac{1}{2}$ (2) 2p

Din relațiile (1) și (2), obținem: $\frac{G_2N}{AG_2} = \frac{G_1E}{EA} \xrightarrow{R.T. Thales} EG_2 \parallel G_1N$ 1p

Cum $G_1N \subset (BCD)$ și $EG_2 \not\subset (BCD) \Rightarrow EG_2 \parallel (BCD)$ 1p



Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.

Se acordă numai punctaje întregi.