Olimpiada Naţională de Matematică - Etapa locală
Clasa a VII – a
VARIANTA 1

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE şi NOTARE:

1. a) $x = 3-\sqrt{5}$ ....(1p)

$y = 3+\sqrt{5}$ ....(1p)

$m_g = 2$ ....(1p)

b) $3\sqrt{5}-7<0 \Rightarrow \left|3\sqrt{5}-7\right| = 7-3\sqrt{5}$ ....(1p)

$\sqrt{(3+2\sqrt{5})^2} = \left|3+2\sqrt{5}\right| = 3+2\sqrt{5}$,pentru că $3+2\sqrt{5}>0$ ....(1p)

$\sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = \left|\sqrt{5}-1\right| = \sqrt{5}-1$, pentru că $\sqrt{5}-1>0$ ....(1p)

$\frac{9}{2x-5} \in Z \Rightarrow 2x-5/9 \Rightarrow x \in \{\pm 2,1,3,4,7\}$ ....(1p)

2.

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \Rightarrow ab+bc+ca=abc$ 1p

$\frac{1}{a+bc} = \frac{a}{(a+c)(a+b)} \Leftrightarrow a^2+ab+bc+ca = a^2+abc$, ceea ce este adevărat conform egalității de mai sus 2p

b) $\frac{1}{c+ab}+\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ca} = \frac{a}{(a+c)(a+b)}+\frac{b}{(b+c)(b+a)}+\frac{c}{(c+a)(c+b)}$ 1p

$\frac{1}{c+ab}+\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ca} = \frac{2}{(a-1)(b-1)(c-1)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{2}{(a-1)(b-1)(c-1)}$ 1p

Din ipoteză $\frac{a+b}{ab} = \frac{c-1}{c}$ 1p

Finalizare 1p

3. Construim $EQ//DC, Q\in(AP)$. Aplicăm teorema lui Thales în triunghiul $\triangle PAB \Rightarrow \frac{PQ}{QA} = \frac{PE}{EB}$. Tot cu teorema lui Thales în triunghiul $\triangle PBC \Rightarrow \frac{PD}{DN} = \frac{PE}{EB}$. 2p

Obţinem că $\frac{PQ}{QA} = \frac{PD}{DN} \overset{R.TH}{\Rightarrow} QD//AN \Rightarrow \angle QDA \equiv \angle DAN$. 1p

De asemenea în triunghiul $\triangle QDA$, $[QD]$ este şi mediană şi înălţime, astfel obţinem $\angle QDA \equiv \angle QAD$. Vom obţine că $\angle QAD \equiv \angle DAN$. (1) 2p

În triunghiul $\triangle AMC$, $[AD]$ este şi înălţime şi mediana , deci $\triangle AMC$ isoscel , de unde $[AD]$ bisectoare şi deci $\angle DAM \equiv \angle DAC$. (2) 1p

Din (1) şi (2) obţinem că $\angle FAC \equiv \angle PAM$. 1p

4. Să arătăm că $BP \perp MN$

Fie R mijlocul lui $[BP]$. Cum ABP este isoscel $\Rightarrow$

$\Rightarrow AR \perp BP$ (1). În triunghiul PBC, $[RM]$ = linie mijlocie $\Rightarrow$

$RM \parallel BC$ şi $RM = \frac{BC}{2}$. Rezultă că $ARMN$ = paralelogram ($RM = AN$) $\Rightarrow \Rightarrow AR \parallel MN$, (2). Din (1) şi (2) $\Rightarrow BP \perp MN$.

....3 puncte

Să arătăm că $DP \perp MQ$

Fie S mijlocul lui $[DP]$. Cum triunghiul APD – isoscel $\Rightarrow$

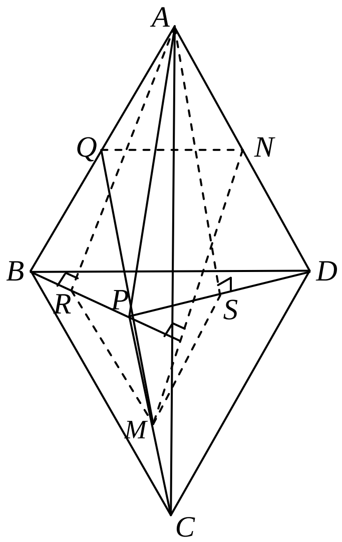
$\Rightarrow AS \perp PD$, (3). În triunghiul PCD, $[SM]$ = linie mijlocie $\Rightarrow$

$SM \parallel CD$ şi $SM = \frac{CD}{2}$. Rezultă că $ASMQ$ = paralelogram (are laturile opuse AQ şi SM paralele şi congruente) $\Rightarrow AS \parallel MQ$, (4). Din (3) şi (4) $\Rightarrow DP \perp MQ$.

....3 puncte

Dacă P se află pe diagonala AC atunci $MP \perp QN$.

....1 punct



Notă:

Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.

Se acordă numai punctaje întregi.