Olimpiada Naţională de Matematică - Etapa locală
Clasa a VI – a
VARIANTA 1

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

1. Conform teoremei împărţirii cu rest, avem:

n = 3k + 1, k ∈ N

n = 4p + 2, p ∈ N

n = 5q + 3, q ∈ N 1p

Adunând pe 2 în toate cele 3 relaţii obţinem:

n + 2 ∈ $M_3 \cap M_4 \cap M_5$ 1p

n + 2 ∈ M_{60} ⇒ n + 2 = 60s ⇒ n = 60s – 2 .... 1p

Dacă s = 2m, m ∈ N*,

atunci n = 120m – 2 = 120m – 120 + 118 = 120(m – 1) + 118 .... 1p

Deducem că restul împărţirii numărului n la 120 este 118. .... 1p

Dacă s = 2m + 1, m ∈ N, atunci n = 120m + 58 .... 1p

Deducem că restul împărţirii numărului n la 120 este 58. .... 1p

2. **a)** $28^{28} = 28^{27} \cdot 28 = 28^{27} \cdot (27 + 1) = 28^{27} \cdot (3^3 + 1)$ 1p

$28^{28} = (28^9 \cdot 3)^3 + (28^9 \cdot 1)^3 \Rightarrow 28^{28} \in A$ 1p

$1792^{1792} = 1792^{1791} \cdot 1792 = 1792^{1791} \cdot (12^3 + 4^3)$ 1p

$1792^{1792} = (1792^{597} \cdot 12)^3 + (1792^{597} \cdot 4)^3 \Rightarrow 1792^{1792} \in A$ 1p

b) Considerăm $n = M_3^3 + 1 = (3k)^3 + 1$ 1p

Vom avea:

$$n^n = [(3k)^3 + 1]^{(3k)^3} \cdot [(3k)^3 + 1]$$

$$n^n = \{[(3k)^3 + 1]^{9k^3} \cdot 3k\}^3 + \{[(3k)^3 + 1]^{9k^3}\}^3$$ 1p

Cum k este număr natural, deducem că există o infinitate de numere n^n ∈ A. 1p

3. Se notează $(\sphericalangle AOB)$ cu x și $\Rightarrow (\sphericalangle COB) = 4x$ se obţine

$(\sphericalangle COB) = 144^\circ$ 1p

Finalizare : $(\sphericalangle COD) = 108^\circ$ 2p

b) Se tratează cazul $[ON \subset Int(\sphericalangle COM)$.

Dacă se notează $(\sphericalangle MON) = x \Rightarrow (\sphericalangle DOM) = (\sphericalangle CON) = 2x$ și se obţine

$x = 21^\circ 36'$ 1p

Obtine $m(\sphericalangle CON) = 43^\circ 12' < 45^\circ$ care nu convine 1p

Se tratează cazul $[OM \subset Int(\sphericalangle CON)$.

Dacă se notează $(\sphericalangle MON) = x \Rightarrow (\sphericalangle CON) = 2x; (\sphericalangle DOM) = 2x - x = x$ și se obţine $x = 36^\circ$,

deci $(\sphericalangle CON) = 72^\circ > 45^\circ$ 1p

Finalizare $(\sphericalangle BOM) = (\sphericalangle BOC) + (\sphericalangle COM) = 180^\circ$ si B,O,M coliniare 1p

4.

a) Avem $3\cdot AC = 2\cdot BC$, (1), AC +CB = AB, deci AC + BC = 160, (2). 1p

Înmulţim (2) cu 2 şi avem $2\cdot AC + 2\cdot BC = 320$ şi utilizănd (1) $\Rightarrow$ $5\cdot AC = 320 \Rightarrow$ AC = 64 cm. 2p

Analog se calculează şi se obţine BD = 100 cm. 2p

b) Dacă DB = 100 cm, atunci AD = 60 cm 1p

şi cum AC = 64 cm $\Rightarrow$ punctele sunt în ordinea : A, D, C, B. 1p

Notă:

Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.
Se acordă numai punctaje întregi.