Luni, 9 iulie, 2018

Problema 1. Fie Γ cercul circumscris unui triunghi ascuţitunghic ABC. Punctele D şi E se află pe segmentele AB şi respectiv AC, astfel încât $AD = AE$. Mediatoarele segmentelor BD şi CE intersectează arcele mici AB şi AC ale cercului Γ în punctele F şi respectiv G. Demonstraţi că dreptele DE şi FG sunt paralele sau coincid.

Problema 2. Determinaţi toate numerele naturale $n \geq 3$ pentru care există numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$, astfel încât $a_{n+1} = a_1$ şi $a_{n+2} = a_2$, şi

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

pentru $i = 1, 2, \ldots, n$.

Problema 3. Un *triunghi anti-Pascal* este o aranjare de numere în formă de triunghi echilateral astfel încât, cu excepţia numerelor aflate pe rândul cel mai de jos, fiecare număr este modulul diferenţei celor două numere aflate sub el pe rândul imediat următor. De exemplu, următoarea aranjare este un triunghi anti-Pascal având patru rânduri, conţinând toate numerele naturale de la 1 la 10:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Decideţi dacă există un triunghi anti-Pascal cu 2018 rânduri care să conţină toate numerele naturale de la 1 la $1 + 2 + \cdots + 2018$.

Language: Romanian

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte

Marţi, 10 iulie, 2018

Problema 4. Numim *poziţie* orice punct (x, y) din plan astfel încât x şi y sunt numere naturale, ambele nenule şi mai mici sau egale decât 20.

La început, fiecare din cele 400 de poziţii este neocupată. Ana şi Radu pun pe rând jetoane, cu Ana mutând prima. Când îi vine rândul, Ana pune un nou jeton roşu pe o poziţie neocupată, astfel încât distanţa dintre orice două poziţii ocupate de jetoane roşii nu este egală cu $\sqrt{5}$. Când îi vine rândul, Radu pune un nou jeton albastru pe orice poziţie neocupată (O poziţie ocupată de un jeton albastru poate fi la orice distanţă faţă de orice altă poziţie ocupată). Ei se opresc atunci când un jucător nu mai poate pune un jeton.

Găsiţi cel mai mare număr K astfel încât Ana poate pune sigur cel puţin K jetoane roşii, indiferent de cum pune Radu jetoanele lui albastre.

Problema 5. Fie $a_1, a_2, \ldots$ un şir infinit de numere naturale nenule. Presupunem că există un număr natural $N > 1$ astfel încât, pentru orice $n \geq N$, numărul

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

este natural. Demonstraţi că există un număr natural nenul M astfel încât $a_m = a_{m+1}$ pentru orice $m \geq M$.

Problema 6. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu propietatea că $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Punctul X se află în interiorul patrulaterului $ABCD$ astfel încât

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{şi} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

Demonstraţi că $\angle BXA + \angle DXC = 180°$.

Language: Romanian

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte