Vineri, 10 iulie 2015

Problema 1. Spunem că o mulţime finită $\mathcal{S}$ de puncte din plan este *echilibrată* dacă, pentru orice două puncte diferite A şi B din $\mathcal{S}$, există un punct C din $\mathcal{S}$ astfel încât $AC = BC$. Spunem că $\mathcal{S}$ este *necentrată* dacă, pentru orice trei puncte diferite A, B şi C din $\mathcal{S}$, nu există niciun punct P din $\mathcal{S}$ astfel încât $PA = PB = PC$.

(a) Arătaţi că pentru orice întreg $n \geqslant 3$ există o mulţime echilibrată alcătuită din n puncte.

(b) Determinaţi toţi întregii $n \geqslant 3$ pentru care există o mulţime echilibrată şi necentrată, alcătuită din n puncte.

Problema 2. Determinaţi toate tripletele de întregi strict pozitivi (a, b, c), astfel încât fiecare dintre numerele

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

să fie o putere a lui 2.

(*O putere a lui* 2 *este un întreg de forma* 2^n, *unde* n *este un întreg nenegativ.*)

Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic, cu $AB > AC$. Fie Γ cercul său circumscris, H ortocentrul său şi F piciorul înălţimii din A. Fie M mijlocul segmentului BC. Fie Q punctul de pe Γ pentru care $\angle HQA = 90^\circ$ şi fie K punctul de pe Γ pentru care $\angle HKQ = 90^\circ$. Presupunem că punctele A, B, C, K şi Q sunt diferite două câte două şi că sunt situate pe Γ în această ordine.

Demonstraţi că triunghiurile KQH şi FKM au cercurile circumscrise tangente între ele.

Timp: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă valorează 7 puncte

Sâmbătă, 11 iulie 2015

Problema 4. Triunghiul ABC are cercul circumscris Ω, având centrul O. Un cerc Γ cu centrul A intersectează segmentul BC în punctele D şi E, astfel încât B, D, E şi C sunt diferite două câte două şi sunt situate pe dreapta BC în această ordine. Fie F şi G punctele de intersecţie a cercurilor Γ şi Ω, astfel încât A, F, B, C şi G se află pe Ω în această ordine. Fie K al doilea punct de intersecţie a cercului circumscris triunghiului BDF cu segmentul AB. Fie L al doilea punct de intersecţie a cercului circumscris triunghiului CGE cu segmentul CA.

Presupunem că dreptele FK şi GL sunt diferite şi se taie în punctul X. Demonstraţi că X se află pe dreapta AO.

Problema 5. Fie $\mathbb{R}$ mulţimea numerelor reale. Determinaţi toate funcţiile $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relaţia

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \;=\; x + f(x+y) + yf(x)$$

pentru orice numere reale x şi y.

Problema 6. Şirul $a_1, a_2, \ldots$ de numere întregi satisface condiţiile:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ pentru orice $j \geqslant 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ pentru orice $1 \leqslant k < \ell$.

Demonstraţi că există doi întregi strict pozitivi b şi N astfel încât

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b)\right| \leqslant 1007^2$$

pentru orice întregi m şi n care satisfac relaţia $n > m \geqslant N$.

Timp: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă valorează 7 puncte