49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Miercuri 16 iulie, 2008

Problema 1. Într-un triunghi ascuţitunghic ABC se notează cu H ortocentrul său. Cercul cu centrul în mijlocul segmentului BC şi care trece prin H intersectează dreapta BC în A_1 şi A_2. Analog, cercul cu centrul în mijlocul segmentului CA şi care trece prin H intersectează dreapta CA în B_1 şi B_2, iar cercul cu centrul în mijlocul laturii AB şi care trece prin H intersectează dreapta AB în punctele C_1 şi C_2. Arătaţi că punctele A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sunt conciclice.

Problema 2. (a) Arătaţi că inegalitatea

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$$

are loc pentru orice numere reale x, y, z, diferite de 1, ce satisfac relaţia $xyz = 1$.

(b) Demonstraţi că există o infinitate de triplete de numere raţionale x, y, z, ce verifică relaţia $xyz = 1$, pentru care mai sus are loc egalitate.

Problema 3. Demonstraţi că există o infinitate de numere naturale n astfel încât numărul $n^2 + 1$ are un factor prim strict mai mare decât $2n + \sqrt{2n}$.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Joi 17 iulie, 2008

Problema 4. Găsiţi toate funcţiile $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ pentru care

$$\frac{\big(f(w)\big)^2 + \big(f(x)\big)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

pentru orice numere reale strict pozitive w, x, y, z, având proprietatea $wx = yz$.

Problema 5. Fie n şi k numere naturale nenule astfel încât $k \geq n$ şi $k - n$ număr par. Considerăm $2n$ becuri notate $1, 2, \ldots, 2n$ ce se pot afla în stările *aprins* sau *stins*. La început toate becurile sunt în starea stins. Considerăm secvenţe de *paşi*: la fiecare pas unul şi numai un bec este aprins dacă era stins, sau stins dacă era aprins.

Fie N numărul de astfel de secvenţe, formate din k paşi, ce duc la starea în care becurile de la 1 la n sunt toate aprinse, iar becurile de la $n + 1$ la $2n$ sunt toate stinse.

Fie M numărul de astfel de secvenţe, formate din k paşi, ce duc la starea în care becurile de la 1 la n sunt toate aprinse, iar becurile de la $n + 1$ la $2n$ sunt toate stinse, dar nici unul dintre becurile de la $n + 1$ la $2n$ nu a fost aprins pe parcursul secvenţei.

Aflaţi numărul N/M.

Problema 6. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $|BA| \neq |BC|$. Notăm cercurile înscrise în triunghiurile ABC şi ADC cu ω_1 şi ω_2. Presupunem că există un cerc ω tangent la semidreptele $(BA$ dincolo de A şi $(BC$ dincolo de C, şi la dreptele AD şi CD. Demonstraţi că tangentele exterioare comune cercurilor ω_1 şi ω_2 se intersectează pe ω.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte