Version: Romanian

Prima zi, 25 iulie 2007

Problema 1. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale. Pentru fiecare indice i $(1 \leq i \leq n)$ definim

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

şi fie

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Arătaţi că oricare ar fi numerele reale $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$:

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \qquad (*)$$

(b) Arătaţi că există numere reale $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ pentru care are loc egalitatea în $(*)$.

Problema 2. Considerăm punctele A, B, C, D şi E astfel încât $ABCD$ este paralelogram iar $BCED$ este patrulater inscriptibil. Fie ℓ o dreaptă care trece prin punctul A. Presupunem că ℓ intersectează interiorul segmentului DC în F şi dreapta BC în G. Dacă, în plus, $EF = EG = EC$, arătaţi că ℓ este bisectoarea unghiului DAB.

Problema 3. La un concurs de matematică o parte dintre concurenţi sunt prieteni. Prietenia este o relaţie reciprocă. Un grup de concurenţi se numeşte *clique* dacă oricare doi din acest grup sunt prieteni. (În particular, grupurile cu strict mai puţin de două persoane formează un clique.) Mărimea unui clique este, prin definiţie, numărul membrilor săi.

Ştiind că, la acest concurs, maximul mărimilor clicurilor este par, arătaţi că toţi concurenţii pot fi repartizaţi în două săli, astfel încât maximumul mărimilor clicurilor din fiecare sală să fie acelaşi.

Timp de lucru : 4 ore şi 30 minute

Version: Romanian

A doua zi, 26 iulie 2007

Problema 4. În triunghiul ABC, bisectoarea interioară a unghiului BCA intersectează cercul circumscris în punctul R, mediatoarea laturii BC în P, iar mediatoarea laturii AC în Q. Fie K mijlocul laturii BC şi L mijlocul laturii AC. Arătaţi că triunghiurile RPK şi RQL au aceeaşi arie.

Problema 5. Fie a şi b numere naturale nenule. Arătaţi că dacă $4ab-1$ divide $(4a^2-1)^2$, atunci $a = b$.

Problema 6. Fie n un număr natural nenul. Considerăm mulţimea

$$S = \{(x, y, z) \ : \ x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\}, \ x + y + z > 0\}$$

ce conţine $(n + 1)^3 - 1$ puncte din spaţiul tridimensional. Determinaţi numărul minim de plane a căror reuniune conţine mulţimea S, dar nu conţine punctul $(0, 0, 0)$.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 minute