Marţi, 23 iulie 2013

Problema 1. Demonstraţi că pentru orice numere naturale nenule k şi n există k numere naturale nenule $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (nu neapărat diferite) astfel încât

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Problema 2. O configuraţie de 4027 de puncte se numeşte *columbiană* dacă are 2013 puncte colorate cu roşu şi 2014 puncte colorate cu albastru, şi nu conţine trei puncte coliniare. O mulţime finită de drepte din plan împarte planul în regiuni. O mulţime de drepte se numeşte *bună* pentru o configuraţie columbiană dacă următoarele două condiţii sunt îndeplinite:

- Nicio dreaptă nu trece printr-un punct al configuraţiei,
- Nicio regiune nu conţine puncte de aceeaşi culoare.

Determinaţi cel mai mic număr natural k astfel încât pentru orice configuraţie columbiană de 4027 de puncte să existe o mulţime bună de k drepte.

Problema 3. Cercul exînscris corespunzător vârfului A al triunghiului ABC este tangent la latura BC în punctul A_1. Definim analog punctele B_1 pe latura CA şi C_1 pe latura AB. Presupunem că centrul cercului circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$ aparţine cercului circumscris triunghiului ABC. Demonstraţi că triunghiul ABC este dreptunghic.

Cercul exînscris *în triunghiul ABC corespunzător vârfului A este cercul tangent laturii BC şi dreptelor AB şi AC, dar nu laturilor AB şi AC. Cercurile exînscrise corespunzătoare vârfurilor B şi C se definesc analog.*

Timp: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte

Miercuri, 24 iulie 2013

Problema 4. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic cu ortocentrul H şi fie W un punct situat în interiorul laturii BC. Punctele M şi N sunt picioarele înălţimilor din B, respectiv C. Notăm cu ω_1 cercul circumscris triunghiului BWN şi fie X punctul diametral opus lui W în cercul ω_1. Analog, notăm cu ω_2 cercul circumscris triunghiului CWM şi fie Y punctul diametral opus lui W în cercul ω_2. Demonstraţi că punctele X, Y şi H sunt coliniare.

Problema 5. Fie $\mathbb{Q}_{>0}$ mulţimea numerelor raţionale strict pozitive. Fie $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ o funcţie ce îndeplineşte următoarele trei condiţii:

(i) Pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ avem $f(x)f(y) \geq f(xy)$,

(ii) Pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ avem $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$,

(iii) Există un număr raţional $a > 1$ astfel încât $f(a) = a$.

Demonstraţi că $f(x) = x$ pentru orice $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Problema 6. Fie $n \geq 3$ un număr întreg şi fie un cerc pe care marcăm $n+1$ puncte echidistante. Considerăm toate numerotările acestor puncte cu numerele $0, 1, \ldots, n$ astfel încât fiecare număr este folosit exact o dată; două astfel de numerotări se consideră identice dacă printr-o rotaţie a cercului coincid. O numerotare se numeşte *frumoasă* dacă pentru orice patru numere $a < b < c < d$ cu $a + d = b + c$, coarda ce uneşte punctele numerotate cu a şi d nu intersectează coarda ce uneşte punctele numerotate cu b şi c.

Fie M numărul de numerotări frumoase şi fie N numărul perechilor ordonate (x, y) de numere naturale nenule cu $x + y \leq n$ şi $\operatorname{cmmdc}(x, y) = 1$. Demonstraţi că

$$M = N + 1.$$

Timp: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte