

Marți, 23 iulie 2013

**Problema 1.** Demonstrați că pentru orice numere naturale nenule  $k$  și  $n$  există  $k$  numere naturale nenule  $m_1, m_2, \dots, m_k$  (nu neapărat diferite) astfel încât

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

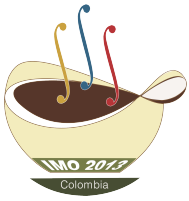
**Problema 2.** O configurație de 4027 de puncte se numește *columbiană* dacă are 2013 puncte colorate cu roșu și 2014 puncte colorate cu albastru, și nu conține trei puncte coliniare. O mulțime finită de drepte din plan împarte planul în regiuni. O mulțime de drepte se numește *bună* pentru o configurație columbiană dacă următoarele două condiții sunt îndeplinite:

- Nicio dreaptă nu trece printr-un punct al configurației,
- Nicio regiune nu conține puncte de aceeași culoare.

Determinați cel mai mic număr natural  $k$  astfel încât pentru orice configurație columbiană de 4027 de puncte să existe o mulțime bună de  $k$  drepte.

**Problema 3.** Cercul exînscriș corespunzător vârfului  $A$  al triunghiului  $ABC$  este tangent la latura  $BC$  în punctul  $A_1$ . Definim analog punctele  $B_1$  pe latura  $CA$  și  $C_1$  pe latura  $AB$ . Presupunem că centrul cercului circumscriș triunghiului  $A_1B_1C_1$  aparține cercului circumscriș triunghiului  $ABC$ . Demonstrați că triunghiul  $ABC$  este dreptunghic.

*Cercul exînscriș în triunghiul  $ABC$  corespunzător vârfului  $A$  este cercul tangent laturii  $BC$  și dreptelor  $AB$  și  $AC$ , dar nu laturilor  $AB$  și  $AC$ . Cercurile exînscrișe corespunzătoare vârfurilor  $B$  și  $C$  se definesc analog.*



Miercuri, 24 iulie 2013

**Problema 4.** Fie  $ABC$  un triunghi ascuțitunghic cu ortocentrul  $H$  și fie  $W$  un punct situat în interiorul laturii  $BC$ . Punctele  $M$  și  $N$  sunt picioarele înălțimilor din  $B$ , respectiv  $C$ . Notăm cu  $\omega_1$  cercul circumscris triunghiului  $BWN$  și fie  $X$  punctul diametral opus lui  $W$  în cercul  $\omega_1$ . Analog, notăm cu  $\omega_2$  cercul circumscris triunghiului  $CWM$  și fie  $Y$  punctul diametral opus lui  $W$  în cercul  $\omega_2$ . Demonstrați că punctele  $X$ ,  $Y$  și  $H$  sunt coliniare.

**Problema 5.** Fie  $\mathbb{Q}_{>0}$  mulțimea numerelor raționale strict pozitive. Fie  $f: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție ce îndeplinește următoarele trei condiții:

- (i) Pentru orice  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$  avem  $f(x)f(y) \geq f(xy)$ ,
- (ii) Pentru orice  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$  avem  $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ ,
- (iii) Există un număr rațional  $a > 1$  astfel încât  $f(a) = a$ .

Demonstrați că  $f(x) = x$  pentru orice  $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ .

**Problema 6.** Fie  $n \geq 3$  un număr întreg și fie un cerc pe care marcăm  $n + 1$  puncte echidistante. Considerăm toate numerotările acestor puncte cu numerele  $0, 1, \dots, n$  astfel încât fiecare număr este folosit exact o dată; două astfel de numerotări se consideră identice dacă printr-o rotație a cercului coincid. O numerotare se numește *frumoasă* dacă pentru orice patru numere  $a < b < c < d$  cu  $a + d = b + c$ , coarda ce unește punctele numerotate cu  $a$  și  $d$  nu intersectează coarda ce unește punctele numerotate cu  $b$  și  $c$ .

Fie  $M$  numărul de numerotări frumoase și fie  $N$  numărul perechilor ordonate  $(x, y)$  de numere naturale nenule cu  $x + y \leq n$  și  $\text{cmmdc}(x, y) = 1$ . Demonstrați că

$$M = N + 1.$$