

Language: Romanian

Duminică, 23 iunie, 2013

Problema 1. Determinați toate perechile ordonate de numere naturale nenule $(a;b)$ pentru care numerele $\frac{a^3b-1}{a+1}$ și $\frac{b^3a+1}{b-1}$ sunt simultan numere naturale nenule.

Problema 2. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic cu $AB < AC$ și O centrul cercului său circumscris ω . Fie D un punct pe segmentul $[BC]$ astfel încât $\widehat{BAD} \equiv \widehat{CAO}$. Fie E al doilea punct de intersecție a cercului ω cu dreapta AD . Dacă M, N și P sunt mijloacele segmentelor $[BE]$, $[OD]$ și respectiv $[AC]$, demonstrați că punctele M, N și P sunt coliniare.

Problema 3. Arătați că $\left(a + 2b + \frac{2}{a+1}\right)\left(b + 2a + \frac{2}{b+1}\right) \geq 16$,
pentru oricare numere reale pozitive a și b cu proprietatea $ab \geq 1$.

Problema 4. Fie n un număr natural nenul. Doi jucători Alina și Bogdan joacă următorul joc:
- Alina alege n numere reale, nu neapărat distincte.
- Alina scrie pe o foaie de hârtie toate sumele obținute adunând câte două dintre cele n numere și-i înmânează foaia lui Bogdan.

(Există $\frac{n(n-1)}{2}$ astfel de sume, nu neapărat distincte.)

- Bogdan câștigă dacă determină corect, dintr-o singură încercare, toate cele n numere alese inițial de Alina.

Poate fi Bogdan sigur că va câștiga în următoarele cazuri?

a. $n = 5$ **b.** $n = 6$ **c.** $n = 8$.

Justificați răspunsurile.

[De exemplu, când $n = 4$, Alina poate alege numerele 1, 5, 7 și 9 care au aceleași sume pe perechi ca și numerele 2, 4, 6 și 10, prin urmare, Bogdan nu poate fi sigur că va câștiga jocul.]

Fiecare problemă valorează 10 puncte.
Timp de lucru: 4 ore și 30 de minute.