MODEL PENTRU SIMULAREA PROBEI DE MATEMATICĂ DIN CADRUL EXAMENULUI DE BACALAUREAT 2013 LA NIVELUL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI
01 FEBRUARIE 2013
BAREM

M2-ştiinţe ale naturii pentru filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii;
Orice variantă de rezolvare corectă şi completă se punctează corespunzător.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{3}\left(\sqrt{27}-\sqrt{3}\right)-\sqrt[3]{27}=\sqrt{3}\left(3\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)-3=$ $9-3-3=3$	**4p** **1p**
2.	$f(x)=3x^2-2x-8\Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{3}=\frac{1\pm 5}{3}$ $\Rightarrow x_1=2, x_2=-\frac{4}{3}$ $f(x)=3x^2-2x-8\le 0\Rightarrow x\in\left[-\frac{4}{3};2\right]$ Mulțimea soluțiilor întregi este $S=\{-1,0,1,2\}$	**1p** **1p** **2p** **1p**
3.	Ecuația este echivalentă cu $5^{x+2}=\frac{2}{10}\Leftrightarrow$ $5^{x+2}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow$ $5^{x+2}=5^{-1}\Leftrightarrow$ (în baza injectivității funcției exponențiale) $x+2=-1\Rightarrow x=-3$	**1p** **1p** **1p** **2p**
4.	$p=\frac{nr.\ cazuri\ favorabile}{nr.\ cazuri\ posibile}$, În mulțimea dată, numerele divizibile cu 6 sunt $0,6,12,...,48$ (adică $6\cdot 0, 6\cdot 1,..., 6\cdot 8$), deci numărul cazurilor favorabile este 9 Mulțimea conține 51 de numere, deci numărul cazurilor posibile este 51 $\Rightarrow p=\frac{9}{51}=\frac{3}{17}$	**1p** **2p** **1p** **1p**
5.	$O(0;0)$ este mijlocul segmentului $[AB]\Leftrightarrow\begin{cases}x_A+x_B=2x_O\\ y_A+y_B=2y_O\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}-4+x_B=0\\ 3+y_B=0\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x_B=4\\ y_B=-3\end{cases}$	**2p** **2p** **1p**
6.	$\sin^2 x+\cos^2 x=1,\forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow\cos^2 x=1-\sin^2 x$ $\Rightarrow\cos^2 x=1-\frac{1}{25}=\frac{24}{25}$	**2p** **1p** **1p**

	Deoarece $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos x = +\sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$	1p

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1.a)	$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -a \\ -1 & a+1 \end{pmatrix}$ $A^2 + A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ $A^2 + A = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $a = 1$	**2p** **1p** **1p** **1p**
b)	Din relația demonstrată la punctul a) : $A(A+I_2) = I_2$ și $(A+I_2)A = I_2$, Inversa matricei A este matricea $A + I_2$, adică $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.	**3p** **2p**
c)	$X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2010 & 2011 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2010 & 2011 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2013 & 2012 \\ 2010 & 2011 \end{pmatrix}$.	**2p** **3p**
2.a)	$x * y = x(y-4) - 4y + 16 + 4$ $x * y = x(y-4) - 4(y-4) + 4$ $x * y = (x-4)(y-4) + 4, \forall x, y \in \mathbb{R}$ (sau prin efectuarea calculelor în membrul drept al identității cerute)	**2p** **2p** **1p**
b)	Pentru $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ $(x*y)*z = [(x-4)(y-4)+4-4](z-4)+4 = (x-4)(y-4)(z-4)+4$ și $x*(y*z) = (x-4)[(y-4)(z-4)+4-4]+4 = (x-4)(y-4)(z-4)+4$ De unde rezultă că $(x*y)*z = x*(y*z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.	**2p** **2p** **1p**
c)	Utilizând scrierea de la punctul a), observăm că $x*4 = (x-4)(4-4)+4 = 4$ și $4*x = (4-4)(x-4)+4 = 4, \forall x \in \mathbb{R}$ În baza asociativității operației $\Rightarrow 1*2*3*4*...*2013 = (1*2*3)*4*(5*6*...*2013) = 4$.	**1p** **1p** **1p** **2p**

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 + 5^x \ln 5$ $\Rightarrow f'(0) = 1 + \ln 5 = \ln e + \ln 5 = \ln 5e$	**3p** **2p**
b)	$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 + 5^x \ln 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ deoarece $5x^4 \geq 0, 3x^2 \geq 0, 5^x \ln 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Rezultă că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$. (Se poate observa, direct, că funcția este o sumă de funcții crescătoare -3p)	**1p** **2p** **2p**
c)	Din faptul că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$, rezultă	**2p**

	pentru $a \le b$, avem $f(a) \le f(b)$. $\Rightarrow a^5 + a^3 + a + 5^a \le b^5 + b^3 + b + 5^b$ $\Leftrightarrow 5^b - 5^a \ge a^5 - b^5 + a^3 - b^3 + a - b, \forall a,b \in \mathbb{R}$ cu $a \le b$.	**2p** **1p**
2.a)	F este funcție derivabilă pe $(0;+\infty)$ și $F'(x) = \frac{2}{9} \cdot 3\sqrt{3x+1} + \frac{2}{9} \cdot (3x+1)\frac{3}{2\sqrt{3x+1}} = \frac{2}{3}\sqrt{3x+1} + \frac{1}{3}\sqrt{3x+1} = \sqrt{3x+1}$ Deci $F'(x) = f(x), \forall x \in (0;+\infty)$.	**1p** **3p** **1p**
b)	$\int_0^2 f(x)dx = F(x)\Big\|_0^2 =$ $= \frac{2}{9}(6+1)\sqrt{7} - \frac{2}{9} =$ $= \frac{14}{9}\sqrt{7} - \frac{2}{9}$	**2p** **2p** **1p**
c)	$\int_0^1 xf(x^2)dx = \int_0^1 x\sqrt{3x^2+1}dx =$ $= \frac{1}{6}\int_0^1 6x\sqrt{3x^2+1}dx = \frac{1}{6} \cdot \frac{(3x^2+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big\|_0^1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{4^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} =$ $= \frac{1}{9} \cdot 8 - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$	**2p** **2p** **1p**