SIMULAREA PROBEI DE MATEMATICĂ DIN CADRUL EXAMENULUI DE BACALAUREAT 2013 LA NIVELUL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI
01 FEBRUARIE 2013
SUBIECT

M_mate-info pentru filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică şi pentru filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.
Pentru toate subiectele se cer rezolvările complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $|x-1|=2x-5$.

5p **2.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $\frac{1}{x+1}\le\frac{1}{2}$.

5p **3.** Determinaţi numărul complex z care are proprietatea $z+2\overline{z}=6+i$.

5p **4.** Determinaţi numărul submulţimilor mulţimii $\{1,2,3,4,5,6\}$, care nu conţin elementul 1.

5p **5.** Determinaţi soluţiile ecuaţiei $\sin x+\cos x=0$, corespunzătoare intervalului $(0,2\pi)$.

5p **6.** În sistemul cartezian xOy, determinaţi coordonatele simetricului originii faţă de dreapta de ecuaţie $x-2y-1=0$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. În mulţimea $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.

5p **a)** Determinaţi suma elementelor matricei $A^2-5A+6I_2$.

5p **b)** Arătaţi că pentru orice număr natural $n\ge 1$, există un număr natural x_n, astfel încât $A^n=\begin{pmatrix}2^n & x_n\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}$.

5p **c)** Pentru numerele x_n definite la punctul anterior, demonstraţi că x_n este divizibil cu 5 dacă şi numai dacă n este par.

2. Se consideră $a\in\mathbb{Z}$ şi legea de compoziţie „$\circ$”, definită pe mulţimea numerelor întregi prin relaţia
$$x\circ y=axy+(a+1)(x+y+1),\text{ oricare } x,y\in\mathbb{Z}.$$

5p **a)** Arătaţi că legea de compoziţie „$\circ$” este asociativă.

5p **b)** Arătaţi că elementul neutru al legii „$\circ$” este -1.

5p **c)** Determinaţi elementele simetrizabile în raport cu legea dată, în cazul $a=-2$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ şi şirul $(x_n)_{n\ge1}$ dat de relaţiile $x_1=1$, $x_{n+1}=f(x_n)$.

5p **a)** Calculaţi derivata funcţiei f.

5p **b)** Determinaţi monotonia şirului $(x_n)_{n\ge1}$.

5p **c)** Arătaţi că $f(x+e)-f(x)\le e$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţiile $f_0:[0,1]\to\mathbb{R}, f_0(x)=\operatorname{arctg} x$ şi $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n\operatorname{arctg} x$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Arătaţi că funcţia $F:[0,1]\to\mathbb{R},\ F(x)=f_0(x)+f_2(x)-x$ este o primitivă a funcţiei $2f_1$.

5p **b)** Demonstraţi că şirul $(I_n)_{n\ge0}$, dat de $I_n=\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$, are limita 0.

5p **c)** Verificaţi că $(n+1)\int\limits_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x+(n-1)\int\limits_0^1 f_{n-2}(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}$, oricare ar fi $n\ge 2$.