



Marti, 10 iulie, 2012

**Problema 1.** Fie  $ABC$  un triunghi și fie  $J$  centrul cercului exînscriș opus unghiului  $A$ . Acest cerc este tangent laturii  $BC$  în  $M$  și dreptelor  $AB$  și  $AC$  în  $K$ , respectiv în  $L$ . Dreptele  $LM$  și  $BJ$  se intersectează în punctul  $F$ , iar dreptele  $KM$  și  $CJ$  se intersectează în punctul  $G$ . Notăm cu  $S$  punctul de intersecție a dreptelor  $AF$  și  $BC$  și cu  $T$  punctul de intersecție a dreptelor  $AG$  și  $BC$ .

Arătați că  $M$  este mijlocul segmentului  $ST$ .

(Cercul exînscriș triunghiului  $ABC$  opus unghiului  $A$  este cercul tangent laturii  $BC$ , semidreptei  $AB$  – dar nu laturii  $AB$  – și semidreptei  $AC$  – dar nu laturii  $AC$ .)

**Problema 2.** Fie  $n \geq 3$  un număr natural și fie  $a_2, a_3, \dots, a_n$  numere reale pozitive astfel încât  $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$ . Arătați că

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

**Problema 3.** Jocul *ghicitului cu minciuni* se desfășoară între doi jucători  $A$  și  $B$ . Regulile jocului depind de două numere naturale nenule  $k$  și  $n$  cunoscute ambilor jucători.

Jocul începe prin alegerea de către  $A$  a unor numere naturale  $x$  și  $N$  cu  $1 \leq x \leq N$ . Jucătorul  $A$  ține numărul  $x$  secret și îi comunică corect lui  $B$  numărul  $N$ . Jucătorul  $B$  încearcă în continuare să obțină informații despre  $x$  prin întrebări adresate lui  $A$  în felul următor: fiecare întrebare a lui  $B$  constă în alegerea unei mulțimi  $S$  de numere naturale nenule (eventual chiar una aleasă într-o întrebare anterioară) și chestionarea lui  $A$  dacă  $x$  aparține lui  $S$ . Jucătorul  $B$  poate pune oricâte întrebări.

Jucătorul  $A$  trebuie să răspundă imediat fiecărei întrebări pusă de  $B$  cu *da* sau *nu*, dar poate să mintă de oricâte ori vrea, cu condiția să nu mintă la  $k + 1$  întrebări consecutive.

După ce  $B$  a pus câte întrebări a dorit, el trebuie să prezinte o mulțime  $X$  de cel mult  $n$  numere naturale nenule. Dacă numărul  $x$  aparține mulțimii  $X$  atunci  $B$  câștigă; altfel pierde. Arătați că:

1. Dacă  $n \geq 2^k$ , atunci  $B$  are o strategie câștigătoare;
2. Pentru orice  $k$  suficient de mare, există  $n \geq 1.99^k$  astfel încât  $B$  nu poate garanta câștigarea jocului.



*Miercuri, 11 iulie 2012*

**Problema 4.** Determinați toate funcțiile  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  cu proprietatea că pentru orice numere întregi  $a, b, c$  având  $a + b + c = 0$ , este adevărată egalitatea:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

( $\mathbb{Z}$  este mulțimea numerelor întregi.)

**Problema 5.** Fie  $ABC$  un triunghi cu  $\angle BCA = 90^\circ$ , și fie  $D$  piciorul înălțimii din vârful  $C$ . Fie  $X$  un punct aparținând interiorului segmentului  $CD$ . Fie  $K$  un punct aparținând segmentului  $AX$  astfel încât  $BK = BC$ . Similar, fie  $L$  un punct aparținând segmentului  $BX$  astfel încât  $AL = AC$ . Fie  $M$  punctul de intersecție a dreptelor  $AL$  și  $BK$ .

Arătați că  $MK = ML$ .

**Problema 6.** Determinați toate numerele naturale nenule  $n$  pentru care există numerele naturale  $a_1, a_2, \dots, a_n$  astfel încât

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \dots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \dots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$