

Examenul de bacalaureat 2012

Proba E.c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați numărul real m știind că mulțimile $A = \{2\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + mx + 4 = 0\}$ sunt egale.
- 5p 2. Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $3^{\log_3 x} < 1$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare unul dintre numerele naturale de 2 cifre, acesta să fie format doar din cifre impare.
- 5p 5. Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u} = 3\vec{i} + a\vec{j}$ și $\vec{v} = a\vec{i} + (2a - 3)\vec{j}$ sunt coliniari.
- 5p 6. Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC , știind că $AB = AC = 5$ și $BC = 6$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. În $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} \cos x & 0 & i \sin x \\ 0 & 1 & 0 \\ i \sin x & 0 & \cos x \end{pmatrix}$, unde $x \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Calculați $\det(A(\pi))$.
- 5p b) Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p c) Determinați numerele reale x pentru care $(A(x))^{2012} = I_3$.
2. Pe mulțimea $G = (0, 1)$ se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$.
- 5p a) Arătați că $e = \frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.
- 5p b) Arătați că orice element din mulțimea G este simetrizabil în raport cu legea de compoziție „ $\circ$ ”.
- 5p c) Demonstrați că $f: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ este un izomorfism de la grupul $(G, \circ)$ la grupul $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
- 5p a) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)}$.
- 5p b) Demonstrați că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.
- 5p c) Arătați că funcția $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(\sqrt{x})$ este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$.
2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numerele $I_n = \int_0^1 x^n \cdot \sqrt{1-x^2} dx$ și $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.
- 5p a) Calculați J_1 .
- 5p b) Calculați I_1 .
- 5p c) Demonstrați că $J_{2n} - J_{2n+2} = I_{2n}$ pentru orice număr natural nenul n .