CONCURSUL PENTRU OCUPAREA POSTURILOR DIDACTICE/ CATEDRELOR DECLARATE VACANTE/ REZERVATE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR
13 IULIE 2011

Probă scrisă la **MATEMATICĂ** VARIANTA 2

Profesori

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Total 100 de puncte din care 10 sunt din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**a)** Verificarea pentru $n=1$ Justificarea faptului că $P(k)\Rightarrow P(k+1),\ k\geq 1$	**1p** **4p**
	b) $1^2+2^2+...+7^2=\dfrac{7(7+1)(2\cdot 7+1)}{6}=140$ $a_7=0$	**3p** **2p**
	c) Cum $(n+1)^2+(n+2)^2+...+(n+20)^2=20n^2+20\cdot 21n+\dfrac{20\cdot 21\cdot 41}{6}=$ $=10(2n^2+42n+287)$ se divide cu 10, rezultă că $a_{n+20}=a_n,\ \forall n\geq 1$	**2p** **1p**
	d) $2011^{2011}\equiv 11(\mathrm{mod}\,20)$ $a_m=a_{11}=6$	**1p** **1p**
2.	**a)** AA', BB', CC' sunt bisectoarele interioare ale triunghiului ABC, deci dreptele sunt concurente	**4p** **1p**
	b) $\sphericalangle BIA'=\dfrac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AB'}+\overset{\frown}{A'B}\right)=$ $=\dfrac{1}{2}\left(\overset{\frown}{B'C}+\overset{\frown}{CA'}\right)=\sphericalangle IBA'$, deci triunghiul BIA' este isoscel	**2p** **2p** **1p**
	c) $\sphericalangle(AA',B'C')=\dfrac{1}{2}\left(\overset{\frown}{C'A}+\overset{\frown}{A'B'}\right)=\dfrac{180^\circ}{2}=90^\circ$ Finalizare	**2p** **1p**
	d) $IA'=BA'=2R\sin\dfrac{A}{2}$ şi $IA=\dfrac{bc}{p}\cos\dfrac{A}{2}$ $AI=IA'\Leftrightarrow\dfrac{bc}{p}\cos\dfrac{A}{2}=2R\sin\dfrac{A}{2}\Leftrightarrow\dfrac{S}{p}=2R\sin^2\dfrac{A}{2}\Leftrightarrow r=R(1-\cos A)$	**1p** **1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\sqrt{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}=$ $=1+\sqrt{5}\in M$	**3p** **2p**
	b) Fie $x=a+b\sqrt{5}$ şi $y=c+d\sqrt{5}$ cu $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ $x+y-xy=a+b\sqrt{5}+c+d\sqrt{5}-(ac+5bd)-(ad+bc)\sqrt{5}=$ $=a+c-ac-5bd+(b+d-ad-bc)\sqrt{5}$ Cum $a+c-ac-5bd\in\mathbb{Z}$ şi $b+d-ad-bc\in\mathbb{Z}$, rezultă că $x+y-xy\in M$	 **2p** **2p** **1p**

	c) Fie $x=a+b\sqrt{5}$ cu $\left\|a^2-5b^2\right\|=1$. Dacă $a^2-5b^2=1 \Rightarrow x\left(a-b\sqrt{5}\right)=a^2-5b^2=1$, deci $\frac{1}{x}\in M$, iar dacă $a^2-5b^2=-1 \Rightarrow x\left(-a+b\sqrt{5}\right)=-a^2+5b^2=1$, deci $\frac{1}{x}\in M$	**1p**
	Reciproc, fie $x=a+b\sqrt{5}\in M,\ x\neq 0$. Cum $\frac{1}{x}=\frac{a-b\sqrt{5}}{a^2-5b^2}=\frac{a}{a^2-5b^2}+\frac{-b}{a^2-5b^2}\sqrt{5}\in M$,	**1p**
	rezultă că $a^2-5b^2 \mid a$ şi $a^2-5b^2 \mid b$, deci $\left(a^2-5b^2\right)^2 \mid a^2$ şi $\left(a^2-5b^2\right)^2 \mid b^2$, de unde $\left(a^2-5b^2\right)^2 \mid a^2-5b^2$. Obținem $a^2-5b^2 \mid 1$, deci $\left\|a^2-5b^2\right\|=1$	**1p**
	d) Fie $x_0=9+4\sqrt{5}$. Cum $\frac{1}{x_0}=\frac{1}{9+4\sqrt{5}}=9-4\sqrt{5}\Rightarrow \frac{1}{x_0}\in M$	**1p**
	$x\cdot y\in M,\ \forall x,y\in M \Rightarrow x_0^n\in M$ şi $\frac{1}{x_0^n}=\left(\frac{1}{x_0}\right)^n\in M,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Cum $x_0^n<x_0^{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, rezultă concluzia	**1p**
2.	**a)** Dacă *F* este o primitivă a lui *f*, atunci $F'(x)=f(x)=\frac{1}{3+\cos x}$	**2p**
	Cum $\cos x\in[-1,1]\Rightarrow F'(x)\geq\frac{1}{4}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, deci *F* este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$	**3p**
	b) $\int\frac{\sin x}{3+\cos x}dx=-\int\left(\ln\left(3+\cos x\right)\right)'dx=$	**3p**
	$=-\ln\left(3+\cos x\right)+C$	**2p**
	c) Fie $x_n=2n\pi$ şi $y_n=(2n+1)\pi,\ n\in\mathbb{N}^*$	**1p**
	$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty,$	**1p**
	$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4}=\frac{1}{4},\ \lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ şi cum $\frac{1}{4}\neq\frac{1}{2}$, rezultă concluzia	**1p**
	d) Deoarece *f* este continuă, pară şi periodică de perioadă 2π, avem $\int_0^{2\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=2\int_0^{\pi}f(x)dx=2\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\int_0^{\pi-\varepsilon}f(x)dx$.	**1p**
	Cu substituția $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2},\ x\in[0,\pi-\varepsilon],\ \varepsilon>0$, rezultă $\int_0^{2\pi}f(x)dx=2\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\int_0^{\mathrm{tg}\frac{\pi-\varepsilon}{2}}\frac{1}{t^2+2}dt=\sqrt{2}\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\Big\|_0^{\mathrm{tg}\frac{\pi-\varepsilon}{2}}=\sqrt{2}\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\frac{\pi-\varepsilon}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

- câte 1 punct pentru precizarea fiecăruia dintre cele patru elemente cerute **4x1p=4 puncte**
[Punctajul se acordă doar în situația în care candidatul a corelat elementele cerute cu conținutul testului proiectat pentru evaluarea sumativă la finalul anului şcolar.]
- câte 2 puncte pentru proiectarea corectă metodico-ştiințifică, adecvată evaluării sumative la finalul anului şcolar, a fiecăruia dintre cei şase itemi construiți **6x2p=12 puncte**
- calitatea structurării testului **2 puncte**
- câte 2 puncte pentru proiectarea corectă a baremului de evaluare şi de notare a fiecăruia dintre cei şase itemi construiți **6x2p=12 puncte**